Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С.

Математические методы финансового анализа

Под научной редакцией д.ф.-м.н., профессора

Мельникова А.В.

Оглавление

2.8. Структура цен опционов на неполных рынках и рынках с ограничениями. Инвестиционные стратегии, основанные на опционах.

2.9. Хеджирование платежных обязательств в среднем квадратическом.

2.10. Гауссовская модель рынка и расчет финансовых контрактов в схемах "гибкого" страхования. Дискретная формула Блэка-Шоулса.

2.11. Переход от биномиальной к непрерывной модели рынка. Формула и уравнение Блэка-Шоулса.

2.12. Модель Блэка-Шоулса. "Греческие" параметры риск-менеджмента, хеджирование при бюджетных ограничениях и с учетом дивидендов. Оптимальное инвестирование.

2.13. Количественный анализ долгосрочного инвестицирования.

2.14. Финансовый анализ в экономике страхования.

2.15. Задачи - case studies.

Рекомендуемая литература

Часть III. Моделирование и прогнозирование на финансовом рынке.

Введение.

3.1. Основы портфельного анализа в условиях неопределенности. Модель Марковитца.

3.2. Модель ценообразования финансовых активов

(Capital Asset Pricing Model, CAPM)

3.3. Рыночные индексы.

3.4. Многофакторная модель.

3.5. Линейные временные ряды.

3.6. Нелинейные временные ряды.

Предисловие научного редактора

Неотъемлемыми атрибутами экономического образования являются знания в области микро- и макроэкономики, бухгалтерского учета, теории финансов, экономики фирмы. Такие знания оказываются востребованными и будут оставаться востребованными практически в любой экономической структуре, стремящейся быть конкурентоспособной. Однако деятельность экономических субъектов не должна рассматриваться изолированно, поскольку все они – фирмы, компании, банки, люди – вовлечены в общую финансовую систему, сердцевиной которой является финансовый рынок. Эта система, весьма динамична в своем развитии, отражает воздействие общих технологических достижений (информационно-компьютерные технологии и др.) и своих внутренних источников. К последним относятся плавающие курсы валют и процентных ставок и целый спектр финансовых инновационных инструментов, характерной чертой которых являются отложенные в будущее платежи. В результате существенно усложняется характер финансовой информации и анализ инвестиционной активности любой фирмы, вовлеченной в современную финансовую систему.

Этим в первую очередь объясняется содержание дисциплин по финансовому анализу, которое все больше наполняется количественными методами финансовой математики. Именно они позволяют моделировать будущие потоки платежей, учитывать неопределенности финансовых контрактов, связанные с развитием финансового рынка в контрактный период, рассчитывать цены таких контрактов с минимизацией риска.

Настоящая книга «Математические методы финансового анализа» (авторы Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С.) посвящена именно этому актуальному направлению финансового анализа.

В первой части, написанной Поповой Н.В., приводятся различные формулы и операции финансового анализа в условиях нестохастичности окружающей среды. Базу таких расчетов составляет так называемая финансовая арифметика, без которой не обходится ни одна книга по данной тематике.

Во второй части книги, написанной Мельниковым А.В., излагаются методы стохастической финансовой математики, составляющие методологическую основу финансовых расчетов в условиях рисковой финансовой среды.

Третья часть, написанная Скорняковой В.С., посвящена в основном вопросам моделирования и прогнозирования финансовых данных и оптимизации инвестиций, что также является безусловным атрибутом финансового анализа.

Книга снабжена адаптированным к тексту пакетом прикладных программ, содержит объемный материал по заявленной тематике и может быть использована в качестве учебника для студентов экономико-математических специальностей.

Мельников А.В.

Часть I. Финансовый анализ в условиях определенности.

Попова Н.В.

Содержание

Свойства и экономическое содержание срока окупаемости.

Свойства и экономическое содержание индекса доходности.

Сравнение двух инвестиционных проектов.

1.23. Зависимость показателей эффективности от параметров инвестиционного проекта.

Зависимость показателей эффективности от величины вложенных инвестиций.

Зависимость показателей эффективности от ставки дисконтирования.

Взаимосвязь показателей эффективности.

Зависимость показателей эффективности от $NPV(i)$ *проекта.*

Связь срока окупаемости n^* *и индекса доходности* d.

1.24. Внутренняя доходность облигации. Временная структура процентных ставок.

Свойства внутренней доходности облигации.

1.25. Купонная облигация. Зависимость цены облигации от внутренней доходности, купонной ставки, срока до погашения.

Зависимость цены купонной облигации от срока до погашения.

1.26. Факторы, влияющие на величину изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности.

1.27. Дюрация и показатель выпуклости облигации.

Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации.

1.28. Временная зависимость стоимости инвестиции в облигацию. Иммунизирующее свойство дюрации облигации.

Свойства планируемой и фактической стоимостей инвестиции.

1.29. Инвестиции в портфель облигаций. Дюрация и показатель выпуклости портфеля.

Меры доходности портфеля.

Дюрация и показатель выпуклости портфеля облигаций.

Свойства дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций.

Иммунизирующее свойство дюрации портфеля.

1.30. Управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации.

Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

Иммунизация портфеля облигаций при наличии трансакционных расходов.

1.31. Простейшие активные и пассивные стратегии управления портфелем облигаций.

1.32. Задачи.

Рекомендуемая литература.

Введение.

Первая часть учебника посвящена применению математических методов к изучению специальных разделов финансового анализа в условиях определенности - производственных и финансовых инвестиций. Эта часть учебника написана на основе материалов учебного курса «Математические методы финансового анализа», подготовленного для студентов старших курсов экономико-математического факультета РЭА им. Г.В. Плеханова, уже изучивших ряд разделов высшей математики и только приступающих к изучению финансовых расчетов. Курс и первая часть учебника подготовлены доцентом кафедры высшей математики РЭА Поповой Н.В. Задачами данной части учебника являются приобретение учащимися фундаментальных знаний в области финансовых расчетов и овладение на этой основе практическими навыками анализа инвестиций. Значительная часть материала излагается на основе таких разделов высшей математики, как «Математический анализ», «Исследование операций». При подготовке учебника использована современная отечественная и иностранная литература.

Финансовый анализ в условиях определенности предполагает, что данные для анализа заранее известны и фиксированы. Получение будущих доходов в точно указанные сроки и в полном объеме считается гарантированным, т.е. отсутствует риск неплатежа. Содержание параграфов 1–5 представляет собой математическую основу финансового анализа в условиях определенности. В связи с этим основное внимание в этих параграфах уделено определению основополагающих понятий и выводу формул. Уметь выводить формулы наращения и дисконтирования денежных сумм необходимо для понимания их механизмов. Необходимо также представлять себе результат применения того или иного метода наращения (дисконтирования) денежной суммы по сравнению с другими методами, а также сферу применения методов. В связи с этим проводится подробный сравнительный анализ методов наращения и дисконтирования. Рассмотрены некоторые важные понятия теории процентных ставок и их приложения, а также потоки платежей, что создает основу для анализа производственных и финансовых инвестиций в условиях определенности.

В параграфах 6, 7 излагаются методы оценки инвестиционных проектов с классической схемой инвестирования. Подробно рассматриваются экономический смысл и свойства показателей эффективности проектов. Изучаются зависимости показателей эффективности от параметров инвестиционного проекта. Последнее представляется особенно важным, поскольку правильная оценка проекта определяется не только значениями показателей эффективности, но и их поведением при изменении параметров проекта. Полезно также представлять себе взаимосвязь показателей эффективности. Кроме того, рассмотрены проблемы сравнения инвестиционных проектов.

Параграфы 8 - 15 посвящены финансовым инвестициям с фиксированными доходами. Подробно изучаются факторы, влияющие на оценку инвестиции в облигацию, такие как временная структура процентных ставок, внутренняя доходность, купонная ставка, дюрация и показатель выпуклости облигации, иммунизирующее свойство дюрации. В этой же части учебника изучаются характеристики портфеля облигаций без кредитного риска, стратегии управления портфелем облигаций. Особое внимание уделяется стратегии иммунизации.

Приводится большое количество примеров решения задач. Содержание задач для самостоятельного решения соответствует теоретическому материалу первой части учебника.

Результатом изучения первой части должно стать не только умение произвести простейшие финансовые расчеты, но и знание математических методов анализа инвестиций в условиях определенности.

1.1. Методы наращения и дисконтирования денежных сумм.

Основные определения и формулы.

Большая часть финансовых сделок связана с предоставлением денег в долг. При этом как правило заемщик платит кредитору проценты за пользование ссудой. Величина процентной ставки определяется балансом спроса и предложения, степенью риска и величиной инфляции. Кроме того, процентная ставка учитывает фактор времени, так как деньги, относящиеся к разным моментам времени, неравноценны. Согласно принципу неравноценности денег во времени, современные деньги ценнее будущих. В данном параграфе рассматриваются методы наращения и дисконтирования денежных сумм при однократном предоставлении денег в долг.

Будем использовать следующие обозначения:

$t = 0$ - момент предоставления денег в долг (настоящий момент времени);

T или n - срок долга;

P_t - сумма, предоставленная в долг в момент времени t;

P_0 - сумма, предоставленная в долг в момент времени $t = 0$;

S_t - сумма погашаемого долга в момент t;

i - процентная ставка (наращения);

d - учетная ставка.

Предоставление денег в долг как правило связано с одной из двух операций - наращения или дисконтирования денежной суммы.

Операция наращения применяется тогда, когда заданы сумма первоначального долга P_0, процентная ставка и срок долга T. Требуется найти сумму погашаемого долга S_T.

Определение. Процесс увеличения суммы долга в связи с присоединением к нему начисленных процентов называется наращением суммы первоначального долга.

Найденную наращением сумму погашаемого долга называют наращенной суммой долга.

Операция дисконтирования применяется тогда, когда заданы сумма погашаемого долга S_T, которую следует уплатить через время T, а также процентная ставка. Требуется найти сумму первоначального долга P_0. В этом случае говорят, что сумма S_T дисконтируется или учитывается.

Определение. Процесс уменьшения суммы погашаемого долга в связи с начислением и удержанием процентов называется дисконтированием или учетом погашаемого долга, а сами начисленные и удержанные проценты называются дисконтом.

Найденную дисконтированием сумму первоначального долга P_0 называют современной или приведенной к моменту $t = 0$ величиной погашаемого долга S_T. Таким образом, современная величина суммы S_T, подлежащей выплате через время T, это сумма денег P_0, которая, будучи вложенной в момент $t = 0$, через время T даст сумму S_T.

Определение. Проценты, или процентные деньги, - это абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг на время T.

Если доход определяется операцией наращения, то проценты вычисляют по формуле

$$I(T) = S_T - P_0. \qquad (1.1)$$

Если доход определяется операцией дисконтирования, то проценты называют дисконтом и вычисляют по формуле

$$D(T) = S_T - P_0. \qquad (1.2)$$

В финансовой математике различают два вида ставок начисления процентов: процентная ставка и учетная ставка. Пусть t^* - фиксированный отрезок времени (например: 1 месяц, 6 месяцев, 1 год), P_0 - сумма, предоставленная в долг в момент $t = 0$ на время t^*, S_{t^*} - сумма погашаемого долга в момент t^*.

Определение. Процентная ставка i за период t^* - это отношение дохода за время t^* к сумме вложенных средств:

$$i = \frac{S_{t^*} - P_0}{P_0} \qquad (1.3)$$

Определение. Учетная ставка d за период t^* - это отношение дохода за время t^* к сумме погашаемого долга:

$$d = \frac{S_{t^*} - P_0}{S_{t^*}} \qquad (1.4)$$

Обе ставки выражаются в процентах или десятичных дробях.

Определение. Отрезок времени t^*, к которому приурочена процентная ставка, называется периодом начисления процентов.

В операции наращения период начисления процентов называют также периодом наращения. В операции дисконтирования период начисления процентов называют также периодом дисконтирования.

В зависимости от выбранного отрезка t^* процентную ставку называют ежемесячной, полугодовой, годовой и т.д. При этом подразумевается однократное начисление процентов по этой ставке за период. Чаще всего применяется годовая процентная ставка.

Определение. Число $n = \frac{T}{t^*}$ называется числом периодов начисления процентов в сроке долга T.

Если срок долга измеряется в числе периодов начисления процентов n, то отрезок t^*, т.е. один период начисления процентов, принимается за единицу измерения времени, а ставки i и d называют процентными ставками за единицу времени. При этом сумма погашаемого долга обозначается через S_n. В этих обозначениях

$$i = \frac{S_1 - P_0}{P_0} \qquad (1.5)$$

$$d = \frac{S_1 - P_0}{S_1}. \qquad (1.6)$$

Формулы (1.5), (1.6) (как и (1.3), (1.4)) означают существование двух принципов расчета процентов. Рассмотрим инвестирование суммы P_0 в момент $t = 0$ на один период. Как следует из (1.5), в момент $t = 1$, т.е. в конце периода, инвестору будет возвращена сумма $S_1 = P_0 + iP_0$. При этом сумма iP_0, выплачиваемая в момент $t = 1$, это проценты $I(1) = S_1 – P_0 = iP_0$ за время [0, 1] на заем величиной P_0 в момент $t = 0$. Таким образом, проценты по ставке i начисляются на сумму первоначального долга P_0 в момент $t = 1$.

Согласно (1.6), в обмен на возврат суммы S_1 в момент $t = 1$ инвестор даст взаймы сумму $P_0 = S_1 – dS_1$. В этом случае проценты по ставке d начисляются в начальный момент времени $t = 0$ на сумму погашаемого долга S_1. Сумма P_0 может рассматриваться как заем суммы S_1, возвращаемой через единицу времени, при котором проценты величиной dS_1 выплачиваются заранее, в момент $t = 0$, и составляют доход кредитора $D(1) = S_1 – P_0 = dS_1$ за время [0, 1].

Таким образом, проценты по ставке i начисляются в конце периода начисления процентов, а проценты по учетной ставке d - в начале периода начисления процентов.

Проценты различают по базе для их начисления.

Определение. Процентная ставка называется простой, если на каждом периоде база для начисления процентов является постоянной.

Определение. Процентная ставка называется сложной, если на каждом периоде базой для начисления процентов является сумма, полученная на предыдущем периоде наращения или дисконтирования.

Методы наращения по ставке *i*.

Рассмотрим задачу. На банковский счет размещена сумма P_0 под годовую ставку i без промежуточных выплат на счет или со счета. Какова будет сумма вклада через n лет?

1) Наращение по простой ставке i.

Здесь $t = 0$ - момент размещения суммы P_0 на банковский счет. Единица измерения времени - 1 год. Как следует из (1.5), проценты за первый год вклада равны $I_1 = iP_0$. Согласно определению простой процентной ставки, проценты за каждый год вклада одинаковы и равны

$$I_1 = I_2 = \ldots = I_n = iP_0. \qquad (1.7)$$

Накопленные проценты за весь срок вклада n лет составят

$$I(n) = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = niP_0. \qquad (1.8)$$

Тогда наращенная сумма вклада через n лет станет равной

$$S_n = P_0 + I(n).$$

Отсюда

$$S_n = P_0\,(1 + in). \qquad (1.9)$$

Таким образом, если через n лет счет закрывается, то инвестору выплачивается сумма $P_0(1 + in)$. Этот платеж состоит из возврата исходного вложения P_0 и процентов $I(n) = niP_0$. (1.9) - формула наращенной суммы долга по простой процентной ставке i в течение n периодов. I_1, I_2 ,…, I_n – проценты за каждый период (единицу времени). В формуле (1.9) n необязательно целое. Нормальная коммерческая практика по отношению к дробным периодам года заключается в платеже процентов на пропорциональной основе. Это позволяет рассматривать выражения (1.8) и (1.9) как применимые ко всем неотрицательным значениям n. Формулой (1.9) обычно пользуются, если срок долга меньше года. Если i - годовая ставка, t - число дней в сроке долга, то $n = \frac{t}{K}$, где K – число дней в году (временная база). Правила выбора временной базы и подсчета числа дней в сроке долга подробно рассмотрены в литературе, например [1,2,5].

Как следует из равенств (1.7), особенностью простых процентов является то, что проценты, будучи зачисленными на счет, сами по себе не зарабатывают дальнейших процентов.

Пример 1.1. В конце третьего квартала сумма вклада стала равной 180 д.е. Найти величину годовой процентной ставки, по которой начислялись проценты в сумме 5 д.е. за каждый квартал.

Так как проценты начисляются в конце каждого квартала, то за единицу измерения времени можно принять 1 квартал. Тогда в конце каждого квартала проценты начисляются по квартальной процентной ставке $\frac{i}{4}$, где i - годовая процентная ставка. Срок вклада $n = 3$ квартала (единицы времени). Наращенная сумма вклада $S_n = 180$ д.е. Проценты за каждый квартал (единицу времени) составляют $I_1 = I_2 = I_3 = 5 = I$. Следовательно, для наращения вклада применяется простая процентная ставка. Проценты за весь срок вклада $I(n) = nI$ = 15 д.е. Так как $S_n = P_0 + I(n)$, то сумма первоначального вклада $P_0 = S_n - I(n)$ = 165 д.е. Поскольку $I = \frac{i}{4}P_0$, то годовая процентная ставка по вкладу $i = \frac{5}{165} \cdot 4 = \frac{4}{33}$.

Замечание. Пользуясь только условиями задачи, найти сумму вклада в конце второго квартала. Полученный ответ проверить по формуле (1.9).

2) Наращение по сложной ставке i.

Будем считать, что в момент $t = 0$ сумма P_0 размещена на банковский счет под сложную годовую процентную ставку. Согласно определению сложной процентной ставки, базой для начисления процентов на каждом периоде является сумма, полученная на предыдущем периоде наращения. Следовательно, проценты за каждый год вклада составляют: $I_1 = iP_0$, $I_2 = iS_1$, …, $I_{n-1} = iS_{n-2}$, $I_n = iS_{n-1}$, где S_1, …, S_{n-2}, S_{n-1} - суммы вклада в конце соответствующего периода наращения. Очевидно, что

$$S_1 = P_0 + I_1, \ldots, S_{n-1} = S_{n-2} + I_{n-1}, S_n = S_{n-1} + I_n. \quad (1.10)$$

Рассмотрим выражения для процентов:

$$I_1 = iP_0,$$

$$I_2 = iS_1 = i(P_0 + I_1) = iP_0 + iI_1 = I_1 + iI_1 = I_1(1 + i),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n = iS_{n-1} = i(S_{n-2} + I_{n-1}) = iS_{n-2} + iI_{n-1} = I_{n-1} + iI_{n-1} = I_{n-1}(1 + i).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &I_2 = I_1(1 + i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &I_n = I_{n-1}(1 + i). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Следовательно, I_1, I_2, … , I_n - члены геометрической прогрессии с первым членом I_1 и знаменателем $(1 + i)$. Проценты за весь срок вклада составляют $I(n) = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$. По формуле суммы n членов геометрической прогрессии находим

$$I(n) = I_1 \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = I_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} = P_0\left((1+i)^n - 1\right). \qquad (1.12)$$

Наращенная сумма вклада через n лет станет равной $S_n = P_0 + I(n)$. Отсюда

$$S_n = P_0(1 + i)^n. \qquad (1.13)$$

Если инвестор закроет свой счет через n лет, он получит сумму $P_0(1 + i)^n$. Этот платеж состоит из возврата исходного вклада P_0 вместе с накопленными процентами (1.12). (1.13) - формула наращенной суммы долга при начислении сложных процентов по ставке i в течение n периодов. I_1, I_2,…, I_n - проценты за каждый период (единицу времени). Выражение (1.13) остается верным для всех неотрицательных значений n.

Как видим из (1.11), особенностью сложных процентов является то, что проценты сами зарабатывают проценты. Вследствие этого влияние сложных процентов на накопление на счете может быть очень значительным, особенно если длительность счета или процентная ставка велики.

Пример 1.2. Какова сумма первоначального вклада, размещенного под сложную процентную ставку, если проценты за первый и второй годы соответственно составили 20 и 21,6 д.е.?

Используем полученные соотношения для сложных процентов. Если единицей измерения времени является 1 год, то $I_1 = 20$ д.е., $I_2 = 21{,}6$ д.е., $I_2 = I_1(1 + i)$, где i - годовая процентная ставка. Отсюда $i = 0{,}08$. Так как $I_1 = iP_0$, то сумма первоначального вклада $P_0 = 250$ д.е.

Замечание. Сделать проверку, вычислив I_2 по определению. Найти I_5 , I_7, S_5, S_7. Как они называются?

3) Наращение суммы вклада по номинальной ставке.

Если сложные проценты начисляются не один, а m раз в году, то годовую процентную ставку называют номинальной и обозначают через $i^{(m)}$. Общее определениие номинальной процентной ставки будет рассмотрено позже. В случае начисления процентов m раз в году годовую номинальную процентную ставку можно определить следующим образом.

Определение. Годовая процентная ставка $i^{(m)}$ называется номинальной, если для начисления сложных процентов за $\frac{1}{m}$ часть года применяется ставка $\frac{i^{(m)}}{m}$.

Таким образом, если сложные проценты начисляются через равные промежутки времени m раз в году, то в конце каждого периода длиной $\frac{1}{m}$ проценты начисляются по ставке $\frac{i^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то mn - число периодов применения ставки $\frac{i^{(m)}}{m}$ в сроке долга. Из формулы (1.13) получаем

$$S_n = P_0\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \qquad (1.14)$$

где $m \geq 1$. Если $m = 1$, то $i^{(1)} = i$, т.е. номинальная ставка совпадает с годовой ставкой сложных процентов, применяемой раз в году. (1.14) – формула наращенной суммы долга по номинальной ставке $i^{(m)}$ при начислении сложных процентов m раз в году в течение n лет.

4) Непрерывное начисление сложных процентов.

Непрерывное начисление процентов - это начисление процентов за бесконечно малые отрезки времени, т.е. при $\frac{1}{m} \to 0$ (или при $m \to \infty$). При непрерывном начислении сложных процентов, когда $m \to \infty$, годовую номинальную процентную ставку обозначают через δ и называют силой роста или интенсивностью процентов, а также непрерывной процентной ставкой. Таким образом, процентная ставка при непрерывном начислении процентов δ - это годовая номинальная процентная ставка при начислении процентов за бесконечно малые отрезки времени.

Перейдем к пределу при $m \to \infty$ в выражении (1.14), учитывая, что при $m \to \infty$ годовую номинальную процентную ставку обозначают через δ:

$$S_n = P_0 \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^{mn} = P_0 e^{\lim\limits_{m\to\infty} mn\,\ln\left(1+\frac{\delta}{m}\right)} = P_0 e^{\lim\limits_{m\to\infty} mn\,\frac{\delta}{m}} = P_0 e^{n\delta}\ .$$

Таким образом,

$$S_n = P_0\, e^{n\,\delta}. \qquad (1.15)$$

(1.15) – формула наращенной суммы долга при постоянной интенсивности процентов в единицу времени δ в течение n периодов. Хотя это математическая идеализация реальности, процессы начисления процентов часто бывает удобно рассматривать как непрерывные.

Пример 1.3. Сравнить сроки удвоения суммы 1000 д.е. при начислении сложных процентов по годовой номинальной процентной ставке 0,1 а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) непрерывно.

Согласно условию, P_0 = 1000 д.е., $\frac{S_n}{P_0}$ = 2, а) m = 2, $i^{(2)}$ = 0,1; б) m = 4, $i^{(4)}$ = 0,1; в) $m \to \infty$, δ = 0,1. Из формул (1.14) и (1.15) получаем $n = \dfrac{\ln 2}{m\ln\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)}$ для случаев а), б) и в случае в) $n = \dfrac{\ln 2}{\delta}$.

Отсюда находим, что первоначальная сумма 1000 д.е. вырастет до 2000 д.е. за а) 7,103 года или 7 лет и 38 дней; б) 7,018 года или 7 лет и 6 дней; в) 6,931 года или 6 лет и 340 дней. Как видим, с увеличением частоты начисления процентов в году срок удвоения суммы уменьшается.

Итак, в зависимости от способа применения процентной ставки i имеем четыре метода наращения суммы долга по этой ставке: по простой (1.9), сложной (1.13), номинальной (1.14), при постоянной интенсивности процентов в единицу времени (или по постоянной силе роста) (1.15). Методы наращения по учетной ставке d будут рассмотрены позже.

Методы дисконтирования.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования.

Математическое дисконтирование – формальное решение задачи, обратной задаче о наращении суммы долга. Сформулируем эту задачу в общем виде. Какую сумму P_0 необходимо выдать в долг в момент $t = 0$, чтобы при начислении на эту сумму процентов по ставке i за единицу времени в течение n периодов получить подлежащую выплате в конце срок долга n сумму S_n ? В зависимости от способа применения процентной ставки i из формул (1.9), (1.13), (1.14), (1.15) получаем

$$P_0 = \frac{S_n}{1+in}, \qquad (1.16)$$

$$P_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n}, \qquad (1.17)$$

$$P_0 = \frac{S_n}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}}, \qquad (1.18)$$

$$P_0 = S_n e^{-n\delta}. \qquad (1.19)$$

(1.16) – (1.19) – формулы современной величины суммы S_n при математическом ее учете по ставке i простыми процентами (1.16), сложными (1.17), по номинальной ставке (1.18), по постоянной силе роста (1.19) в течение n периодов.

Коммерческий (банковский) учет. Сформулируем задачу банковского дисконтирования. По заданной сумме S_n, которая будет выплачена через время n, требуется определить сумму займа P_0 в настоящий момент, при котором проценты за пользование ссудой выплачиваются заранее, в момент предоставления денег в долг $t = 0$. Для начисления и удержания процентов применяется учетная ставка d.

1) Простая ставка дисконтирования d.

Имеем: $t = n$ – момент погашения суммы S_n. Согласно определению учетной ставки (1.6), сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n - 1$, за единицу времени до погашения суммы S_n, есть

$$P_{n-1} = S_n - dS_n.$$

Тогда величина дисконта за последний, n – й, период дисконтирования равна $D_n = dS_n$. Так как d - простая учетная ставка, то суммы дисконта за каждый период дисконтирования одинаковы и равны

$$D_n = D_{n-1} = \ldots = D_1 = dS_n.$$

Величина дисконта за весь срок долга n составляет

$$D(n) = D_n + D_{n-1} + \ldots + D_1 = ndS_n.$$

Согласно (1.2),

$$D(n) = S_n - \mathrm{P}_0.$$

Тогда

$$P_0 = S_n\,(1 - nd\,). \qquad (1.20)$$

(1.20) – формула современной величины суммы S_n при банковском ее учете простыми дисконтами по ставке d в течение n периодов. Суммы D_n, D_{n-1}, … , D_1 - дисконты за каждый период (единицу времени). Выражение (1.20) означает, что в обмен на выплату суммы S_n через время n кредитор даст взаймы сумму $S_n(1- nd)$ в начале этого срока. Заметим, что формула (1.20) справедлива, если срок долга n и учетная ставка d удовлетворяют условию $nd < 1$. Дисконтирование по простой учетной ставке применяют, как правило, в случае краткосрочных сделок, когда $0 < n \le 1$ и $0 < d < 1$.

Пример 1.4. Вексель, погашаемый 1 января 2002 года, учтен за 10 месяцев до его погашения на сумму 180 д.е. Какова величина годовой учетной ставки, если ежемесячный дисконт составляет 2 д.е.?

Так как проценты удерживаются за каждый месяц, то за единицу измерения времени можно принять 1 месяц. Тогда в начале каждого месяца проценты начисляются по ежемесячной учетной ставке $\frac{d}{12}$, где d - годовая учетная ставка. Срок погашения векселя $n = 10$ единиц времени. Сумма $P_0 = 180$ – приведенная (к моменту учета векселя $t = 0$) величина суммы S_n, погашаемой по векселю. Дисконты за каждый период (единицу времени) составляют $D_{10} = D_9 = \ldots = D_1 = 2 = D$. Следовательно, вексель учтен по простой учетной ставке. Размер дисконта за весь срок $D(n) = nD$. Так как $P_0 = S_n - nD$, то сумма, погашаемая по векселю, $S_n = 200$ д.е. Поскольку $D = \frac{d}{12} S_n$, то годовая учетная ставка $d = 0{,}12$.

Замечание. Найти P_9, P_7, P_3, $D(3)$, $D(7)$. Как они называются? Каков смысл этих сумм ?

<u>2) Сложная ставка дисконтирования *d*.</u>

Согласно определению сложной процентной ставки, базой для начисления процентов на каждом периоде является сумма, полученная на предыдущем периоде дисконтирования. Так как для начисления процентов применяется учетная ставка d, то проценты начисляются в начале каждого периода. Рассмотрим процесс дисконтирования суммы S_n по периодам, начиная с n - го. Такой порядок рассмотрения периодов означает, что n - й период дисконтирования является предыдущим по отношению к $(n – 1)$ - му, $(n – 1)$ - й период является предыдущим по отношению к $(n – 2)$ - му и т. д.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n – 1$, т.е. за единицу времени до погашения суммы S_n, есть

$$P_{n-1} = S_n – D(1) = S_n – D_n.$$

P_{n-1} - приведенная к моменту $t = n – 1$ величина суммы S_n. $D(1)$ - величина дисконта за один, n – й, период, $D(1) = D_n = dS_n$. Так как P_{n-1} - это сумма, полученная на n - м периоде дисконтирования, то величина дисконта на $(n – 1)$ - м периоде дисконтирования равна $D_{n-1} = dP_{n-1}$.

Сумма, которую необходимо выдать в долг в момент $t = n – 2$, за два периода до погашения суммы S_n, есть:

$$P_{n-2} = S_n – D(2) = S_n – D_n – D_{n-1} = P_{n-1} – D_{n-1}.$$

P_{n-2} - приведенная к моменту $t = n – 2$ величина суммы S_n. $D(2)$ - величина

дисконта за 2 периода, n - й и $(n – 1)$ - й, $D(2) = D_n + D_{n-1}$. Так как P_{n-2} - это сумма, полученная на $(n – 1)$ - м периоде дисконтирования, то величина дисконта на $(n – 2)$ - м периоде составляет $D_{n-2} = dP_{n-2}$. И так далее.

Приведенная к моменту $t = 0$ величина суммы S_n - это сумма P_0, которую необходимо выдать в долг в момент $t = 0$ за n периодов до погашения суммы S_n:

$$P_0 = S_n – D(n),$$

где $D(n)$ - величина дисконта за весь срок долга. Найдем $D(n)$. Имеем:

$$D_n = dS_n ,$$

$$D_{n-1} = dP_{n-1} = d(S_n – D_n) = dS_n – dD_n = D_n – dD_n = D_n(1 – d),$$

$$D_{n-2} = dP_{n-2} = d(P_{n-1} – D_{n-1}) = dP_{n-1} – dD_{n-1} =$$

$$= D_{n-1} - dD_{n-1} = D_{n-1}(1-d),$$

$$\ldots\ldots..$$

$$D_1 = dP_1 = d(P_2 - D_2) = dP_2 - dD_2 = D_2 - dD_2 = D_2(1-d).$$

Таким образом,

$$D_{n-1} = D_n(1-d),$$

$$D_{n-2} = D_{n-1}(1-d),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$D_1 = D_2(1-d).$$

Следовательно, D_n, D_{n-1}, … ,D_1 - члены геометрической прогрессии с первым членом D_n и знаменателем $(1 - d)$. Величина дисконта за весь срок долга n составляет

$$D(n) = D_n + D_{n-1} + \ldots + D_1.$$

По формуле суммы n членов геометрической прогрессии получаем

$$D(n) = D_n \frac{1-(1-d)^n}{1-(1-d)} = dS_n \frac{1-(1-d)^n}{d} = S_n\left(1-(1-d)^n\right).$$

Так как $P_0 = S_n - D(n)$, то

$$P_0 = S_n(1-d)^n. \qquad (1.21)$$

(1.21) – формула современной величины суммы S_n при банковском ее учете сложными процентами по учетной ставке d в течение n периодов.

Пример 1.5. Государственная облигация учтена за пять лет до погашения. Какова сумма, погашаемая по облигации, если дисконты за последний и предпоследний годы до погашения составили соответственно 2000 и 1600 д.е. ?

Используем полученные соотношения для сложных дисконтов. Если единицей измерения времени является 1 год, то срок долга n = 5 лет, D_4 = 1600 д.е., D_5 = 2000 д.е., $D_4 = D_5(1 - d)$, где d - годовая учетная ставка. Отсюда d = 0,2. Так как $D_5 = dS_5$, то погашаемая сумма S_5 = 10000 д.е.

Замечание. Проверить этот ответ, вычислив D_4 по определению. Найти P_4, P_3, P_2, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$. Каков смысл этих сумм? За какую сумму облигация была продана за пять лет до погашения?

3) Дисконтирование по номинальной учетной ставке.

Если дисконтирование по сложной учетной ставке производится не один, а m раз в году, то годовую учетную ставку называют номинальной и обозначают через $d^{(m)}$.

Определение. Годовая учетная ставка $d^{(m)}$ называется номинальной, если для дисконтирования в течение $\frac{1}{m}$ части года применяется сложная учетная ставка $\frac{d^{(m)}}{m}$.

Таким образом, если дисконтирование по сложной учетной ставке производится через равные промежутки времени m раз в году, то в начале каждого периода длиной $\frac{1}{m}$ начисляются и удерживаются проценты по ставке $\frac{d^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то mn - число периодов применения ставки $\frac{d^{(m)}}{m}$ в сроке долга. Из формулы (1.21) получаем

$$P_0 = S_n\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}, \qquad (1.22)$$

где $m \geq 1$. Если $m = 1$, то $d^{(1)} = d$, т.е. номинальная учетная ставка совпадает с годовой учетной ставкой сложных процентов, применяемой раз в году. (1.22) – формула учета суммы S_n при m-разовом дисконтировании в году по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$ в течение n лет.

4) Непрерывное дисконтирование по сложной учетной ставке.

Непрерывное дисконтирование - это дисконтирование на бесконечно малых отрезках времени, т.е. при $\frac{1}{m} \to 0$ (или при $m \to \infty$).

Так как при непрерывном начислении процентов начало и конец периода начисления процентов совпадают, то номинальные процентные ставки $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ при $m \to \infty$ перестают различаться. Поэтому при $m \to \infty$ пользуются одной процентной ставкой - силой роста δ. Тогда при непрерывном дисконтировании справедлива формула (1.19):

$$P_0 = S_n e^{-n\delta}.$$

Пример 1.6. 10 тыс. д.е. должны быть возвращены через 5 лет. Сравнить современные величины этого долга при его дисконтировании по годовой номинальной учетной ставке 0,12 а) по полугодиям; б) ежеквартально; в) непрерывно.

Согласно условию, $n = 5$, $S_5 = 10\,000$, а) $m = 2$, $d^{(2)} = 0{,}12$; б) $m = 4$, $d^{(4)} = 0{,}12$; в) $m \to \infty$, $\delta = 0{,}12$. Из формул (1.22) и (1.19) получаем:

$$P_0 = S_5\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{5m}$$ для случаев а) и б) и $$P_0 = S_5 e^{-5\delta}$$ в случае в).

Отсюда современная величина суммы 10 тыс. д.е., срок погашения которой через 5 лет, при ее дисконтировании по годовой номинальной учетной ставке в зависимости от m составляет а) 5386,15 д.е.; б) 5437,94 д.е.; в) 5488,12 д.е. Как видим, с увеличением m современная стоимость суммы 10 000 д.е. увеличивается.

Итак, в зависимости от способа применения учетной ставки d имеем четыре метода дисконтирования суммы долга S_n по этой ставке: по простой (1.20),сложной (1.21), номинальной (1.22), по постоянной силе роста (1.19).

Наращение по учетной ставке.

Если решается задача, обратная банковскому дисконтированию, то для нахождения суммы погашаемого долга пользуются учетной ставкой. Например, в этом возникает необходимость при определении суммы, которую надо проставить в векселе, если задана текущая сумма долга. Из формул (1.20), (1.21), (1.22), находим

$$S_n = \frac{P_0}{1-nd}\ , \qquad (1.23)$$

$$S_n = \frac{P_0}{(1-d)^n}\ , \qquad (1.24)$$

$$S_n = \frac{P_0}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}\ . \qquad (1.25)$$

При непрерывном наращении по сложной учетной ставке справедлива формула (1.15) (при $m \to \infty$ номинальные процентные ставки $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$ перестают различаться).

Сравнение методов наращения.

Все рассмотренные методы наращения приведены в таблице.

Метод наращения	Формула	Множитель наращения
По простой процентной ставке i	$S_n = P_0(1+in)$	$1+in$
По сложной процентной ставке i	$S_n = P_0(1+i)^n$	$(1+i)^n$
По номинальной процентной ставке $i^{(m)}$	$S_n = P_0(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}$	$(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}$
По постоянной силе роста δ	$S_n = P_0 e^{\delta n}$	$e^{\delta n}$
По номинальной учетной ставке $d^{(m)}$	$S_n = \frac{P_0}{(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{mn}}$	$\frac{1}{(1-\frac{d^{(m)}}{m})^{mn}}$
По сложной учетной ставке d	$S_n = \frac{P_0}{(1-d)^n}$	$\frac{1}{(1-d)^n}$
По простой учетной ставке d	$S_n = \frac{P_0}{1-nd}$	$\frac{1}{1-nd}$

Определение. Число, показывающее во сколько раз наращенная сумма долга больше первоначальной, называется множителем наращения (или множителем накопления).

Экономический смысл множителя наращения заключается в следующем. Если срок долга n единиц времени, то множитель наращения показывает накопленную к моменту n будующую стоимость 1 д.е., вложенной в момент t = 0 на срок n. Очевидно, что множитель наращения больше 1. Интенсивность процесса наращения определяется множителем наращения. Сравнивая эти множители для каждого значения срока n, считая равными процентные ставки за 1 времени, можно сравнить темпы наращения по различным ставкам. Для этого рассмотрим отношения множителей наращения. Используем формулу разложения в степенной ряд функции

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots, \ -1 < x \le 1.$$

Сравним темпы наращения по номинальной и простой процентным ставкам:

$$\frac{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{1+in} = \left.\frac{1+i^{(m)}n + \frac{mn(mn-1)}{2}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 + \ldots}{1+in}\right|_{i=i^{(m)}} = \frac{1+in+\frac{n(n-\frac{1}{m})}{2}i^2+\ldots}{1+in} =$$

$$= 1 + \frac{ni^2}{2(1+in)}\left(n-\frac{1}{m}\right) + \ldots = \begin{cases} <1, & n < \frac{1}{m} \\ 1, & n = \frac{1}{m} \\ >1, & n > \frac{1}{m} \end{cases}. \qquad (1.26)$$

Отсюда сразу получаем отношение множителей наращения по сложной (m = 1) и простой процентным ставкам:

$$\frac{(1+i)^n}{1+in} = \begin{cases} <1, & n<1 \\ 1, & n=1 \\ >1, & n>1 \end{cases}. \qquad (1.27)$$

Сравним темпы наращения по номинальной процентной ставке в зависимости от m. Пусть $1 \le m_1 < m_2$. Тогда

$$\frac{\left(1+\dfrac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1 n}}{\left(1+\dfrac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2 n}} = \left.\frac{1+i^{(m_1)}n+\dfrac{m_1 n(m_1 n-1)}{2}\left(\dfrac{i^{(m_1)}}{m_1}\right)^2+\ldots}{1+i^{(m_2)}n+\dfrac{m_2 n(m_2 n-1)}{2}\left(\dfrac{i^{(m_2)}}{m_2}\right)^2+\ldots}\right|_{i^{(m_1)}=i^{(m_2)}=j} =$$

$$= \frac{1+jn+\dfrac{n(n-\frac{1}{m_1})}{2}j^2+\ldots}{1+jn+\dfrac{n(n-\frac{1}{m_2})}{2}j^2+\ldots} < 1 \qquad (1.28)$$

для любого срока n. Следовательно, чем больше m, тем быстрее наращение по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$. Самое быстрое наращение по номинальной процентной ставке производится по постоянной силе роста δ, когда $m \to \infty$, а самое медленное наращение соответствует значению $m = 1$ (наращение по сложной процентной ставке).

Таким образом, имеем следующие соотношения множителей наращения по ставке i в зависимости от срока n:

$$0 < n \le \frac{1}{m}: \qquad (1+i)^n < \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} \le 1+in < e^{n\delta};$$

$$\frac{1}{m} < n \le 1: \qquad (1+i)^n \le 1+in < \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} < e^{n\delta}; \qquad (1.29)$$

$$n > 1: \qquad 1+in < (1+i)^n < \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn} < e^{n\delta}.$$

На рис. 1.1.1 показаны кривые наращения, соответствующие четырем методам наращения суммы долга по ставке i.

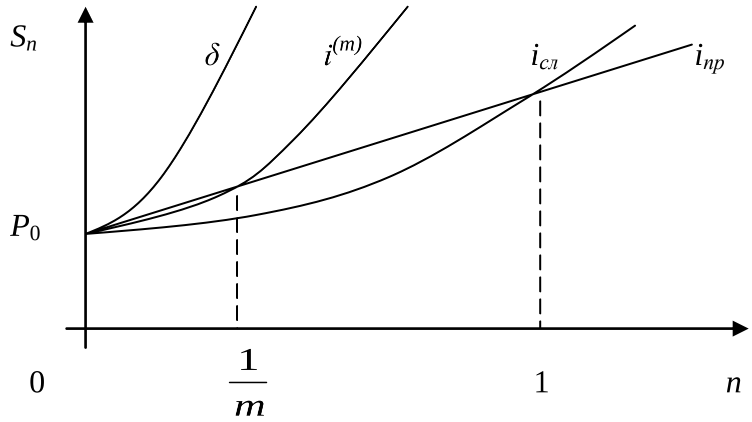


Рис.1.1.1.

Рассмотрим сравнение темпов наращения по учетной ставке. Сравним множители наращения по простой и номинальной учетным ставкам :

$$\frac{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}}{1-dn}=\left.\frac{1-d^{(m)}n+\frac{mn(mn-1)}{2}\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^2+\ldots}{1-dn}\right|_{d=d^{(m)}}=\frac{1-dn+\frac{n(n-\frac{1}{m})}{2}d^2+\ldots}{1-dn}=$$

$$=1+\frac{nd^2}{2(1-dn)}(n-\frac{1}{m})+\ldots=\begin{cases}<1, & n<\frac{1}{m}\\ 1, & n=\frac{1}{m}\\ >1, & n>\frac{1}{m}\end{cases}. \qquad (1.30)$$

Отсюда получаем отношение множителей наращения по простой и сложной (m = 1) учетным ставкам:

$$\frac{(1-d)^n}{1-dn}=\begin{cases}<1, & n<1\\ 1, & n=1\\ >1, & n>1\end{cases}. \qquad (1.31)$$

Сравним темпы наращения по номинальной учетной ставке в зависимости от m. Пусть $1 \le m_1 < m_2$. Тогда

$$\frac{\left(1-\frac{d^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2 n}}{\left(1-\frac{d^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1 n}} = \left.\frac{1-d^{(m_2)}n+\frac{m_2 n(m_2 n-1)}{2}\left(\frac{d^{(m_2)}}{m_2}\right)^2+\ldots}{1-d^{(m_1)}n+\frac{m_1 n(m_1 n-1)}{2}\left(\frac{d^{(m_1)}}{m_1}\right)^2+\ldots}\right|_{d^{(m_1)}=d^{(m_2)}=f} =$$

$$= \frac{1-fn+\frac{n(n-\frac{1}{m_2})}{2}f^2+\ldots}{1-fn+\frac{n(n-\frac{1}{m_1})}{2}f^2+\ldots} > 1 \qquad (1.32)$$

для любого срока n. Следовательно, чем больше m, тем медленнее наращение по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$. Самое медленное наращение по номинальной учетной ставке производится по постоянной силе роста δ, когда $m \to \infty$, а самое быстрое наращение соответствует значению $m = 1$ (наращение по сложной учетной ставке).

Таким образом, имеем следующие соотношения множителей наращения по учетной ставке в зависимости от срока n:

$$0 < n \le \frac{1}{m}: \qquad e^{n\delta} < \frac{1}{1-nd} \le \frac{1}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}} < \frac{1}{(1-d)^n};$$

$$\frac{1}{m} < n \le 1: \qquad e^{n\delta} < \frac{1}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}} < \frac{1}{1-nd} \le \frac{1}{(1-d)^n}; \quad (1.33)$$

$$1 < n < \frac{1}{d}: \qquad e^{n\delta} < \frac{1}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}} < \frac{1}{(1-d)^n} < \frac{1}{1-nd};$$

$$n > \frac{1}{d}: \qquad e^{n\delta} < \frac{1}{\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}} < \frac{1}{(1-d)^n}.$$

На рис.1.1.2 показаны кривые наращения, соответствующие четырем методам наращения суммы долга по учетной ставке.

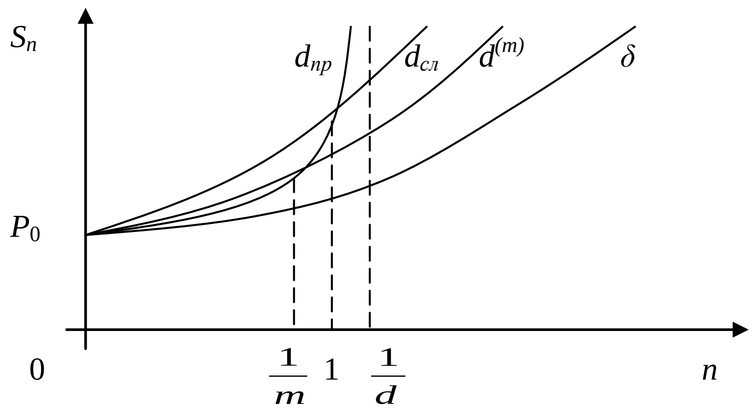


Рис. 1.1.2

Из неравенств (1.29) и (1.33) следует, что при заданном значении срока долга n наращение суммы долга по любой учетной ставке происходит быстрее наращения долга по любой из ставок i.

Свойства наращенной суммы долга.

1. Чем больше срок долга, тем больше наращенная сумма долга S_n.

Действительно, $(S_n)'_n > 0$ для любой процентной ставки.

2. Чем больше процентная ставка, тем быстрее идёт процесс наращения.

Действительно, $(S_n)'_{\text{процентная ставка}} > 0$ для любого метода наращения.

3. С увеличением m процесс наращения по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$ ускоряется, а по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$ замедляется.

Сравнение методов дисконтирования.

Все полученные методы дисконтирования показаны в таблице.

Метод дисконтирования	Формула	Дисконтный множитель
По простой учетной ставке d	$P_0 = S_n(1 - nd)$	$1 - nd$
По сложной учетной ставке d	$P_0 = S_n(1 - d)^n$	$(1 - d)^n$

По номинальной учетной ставке $d^{(m)}$	$P_0 = S_n (1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{mn}$	$(1 - \frac{d^{(m)}}{m})^{mn}$
По постоянной силе роста δ	$P_0 = S_n e^{-\delta n}$	$e^{-\delta n}$
По номинальной процентной ставке $i^{(m)}$	$P_0 = \frac{S_n}{(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{mn}}$	$\frac{1}{(1 + \frac{i^{(m)}}{m})^{mn}}$
По сложной процентной ставке i	$P_0 = \frac{S_n}{(1+i)^n}$	$\frac{1}{(1+i)^n}$
По простой процентной ставке i	$P_0 = \frac{S_n}{1+in}$	$\frac{1}{1+in}$

Определение. Число, показывающее какую долю от суммы погашаемого долга составляет его современная величина, называется дисконтным множителем.

Экономический смысл дисконтного множителя заключается в следующем. Если срок долга n единиц времени, то дисконтный множитель - это современная стоимость 1 д.е., подлежащей выплате через время n. Очевидно, что дисконтный множитель меньше 1. Интенсивность процесса дисконтирования определяется дисконтным множителем. Сравнивая эти множители для каждого значения срока n, считая равными процентные ставки за 1 времени, можно сравнить темпы дисконтирования по различным процентным ставкам. При сравнении методов дисконтирования следует учесть, что отношение дисконтных множителей обратно отношению множителей наращения. Это значит, что неравенства (1.26) – (1.28), (1.30) – (1.32) можно рассматривать как отношения соответствующих дисконтных множителей. Если неравенство (1.28) рассматривать как отношение дисконтных множителей для различных значений m при дисконтировании по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$, то приходим к следующему выводу. Чем больше m, тем меньше современная величина суммы погашаемого долга, т.е. тем быстрее дисконтирование по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$. Самое быстрое дисконтирование соответствует $m \to \infty$ (дисконтирование при постоянной интенсивности процентов в единицу времени δ), самое медленное - дисконтирование по сложной процентной ставке ($m = 1$).

Из неравенств (1.29) получаем соотношения дисконтных множителей при математическом дисконтировании:

$$0 < n \le \frac{1}{m}: \qquad \frac{1}{(1+i)^n} > \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} \ge \frac{1}{1+in} > e^{-n\delta};$$

$$\frac{1}{m} < n \le 1: \qquad \frac{1}{(1+i)^n} \ge \frac{1}{1+in} > \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} > e^{-n\delta}; \qquad (1.34)$$

$$n > 1: \qquad \frac{1}{1+in} > \frac{1}{(1+i)^n} > \frac{1}{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}} > e^{-n\delta}.$$

На рис. 1.1.3 показаны дисконтные кривые, соответствующие четырем методам математического дисконтирования:

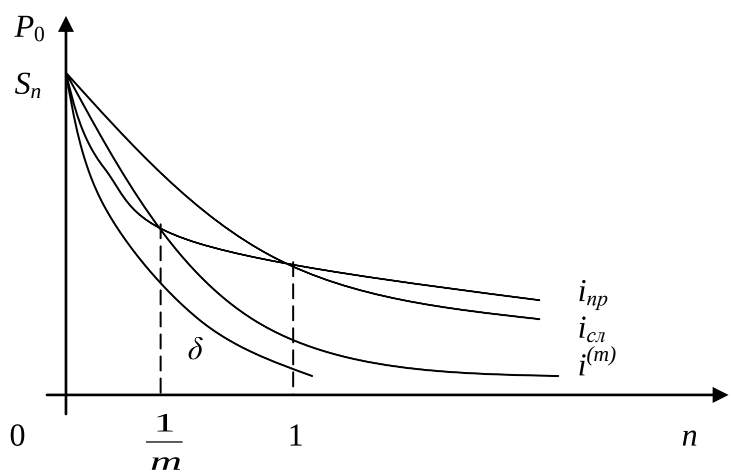


Рис. 1.1.3

Если неравенство (1.32) рассматривать как отношение дисконтных множителей для различных значений m при дисконтировании по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$, то приходим к следующему выводу. Чем больше m, тем больше современная величина суммы погашаемого долга, т.е. тем медленнее дисконтирование по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$. Самое медленное дисконтирование по номинальной учетной ставке соответствует $m \to \infty$ (дисконтирование при постоянной интенсивности процентов δ), самое быстрое дисконтирование соответствует наименьшему значению $m = 1$ (дисконтирование по сложной учетной ставке).

Из неравенств (1.33) получаем соотношения дисконтных множителей при банковском учете:

$$
\begin{aligned}
&0 < n \le \frac{1}{m}: \quad e^{-n\delta} > 1 - nd \ge \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > (1-d)^n;\\
&\frac{1}{m} < n \le 1: \quad e^{-n\delta} > \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > 1 - nd \ge (1-d)^n;\\
&1 < n < \frac{1}{d}: \quad e^{-n\delta} > \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > (1-d)^n > 1 - nd;\\
&n > \frac{1}{d}: \quad e^{-n\delta} > \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn} > (1-d)^n.
\end{aligned} \tag{1.35}
$$

На рис. 1.1.4 показаны дисконтные кривые, соответствующие четырем методам банковского дисконтирования:

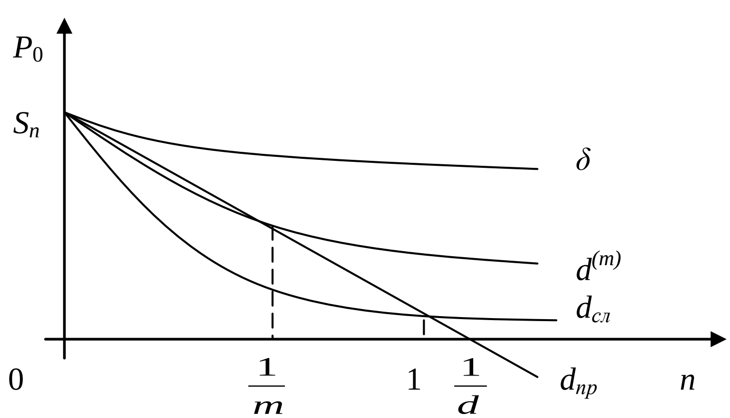


Рис. 1.1.4

Из неравенств (1.34) и (1.35) следует, что при любом сроке долга n дисконтирование по любой учетной ставке происходит быстрее дисконтирования по любой из ставок i. Это означает, что метод банковского учета для заданного срока долга даст меньшее значение современной стоимости суммы погашаемого долга, чем любой из методов математического дисконтирования.

Свойства современной величины суммы погашаемого долга.

1. Чем больше срок долга n, тем меньше современная величина P_0 суммы погашаемого долга S_n.

Действительно, $(P_0)'_{\text{n}} < 0$ для любого метода дисконтирования.

2. Чем больше процентная ставка, тем сильнее дисконтирование.

Действительно, $(P_0)'_{\text{процентная ставка}} < 0$ для любого метода дисконтирования.

3. С увеличением m процесс дисконтирования по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$ ускоряется, а по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$ замедляется.

Из свойств наращенной суммы долга и современной величины суммы погашаемого долга следует, что кредитору выгоднее работать с учетной ставкой, а заемщику – с процентной ставкой i .

Рассмотрим некоторые важные понятия, связанные с операциями наращения и дисконтирования суммы долга.

Эквивалентность процентных ставок.

Определение. Процентные ставки различного вида, приводящие к одному и тому же финансовому результату за один и тот же срок, называются эквивалентными.

Равенство финансовых результатов означает то, что три величины - сумма первоначального долга P_0, погашаемого долга S_n и срок долга n являются постоянными и безразлично, какой метод наращения (или дисконтирования) будет использован в операции. При этом замена одного вида процентной ставки на другой не изменяет финансовых отношений сторон в операции. Соотношения эквивалентности можно получить для любых процентных ставок, приравнивая соответствующие множители наращения или дисконтные множители.

Пример 1.7. Какой простой процентной ставкой можно заменить годовую учетную ставку 15 % при учете векселя за 100 дней до погашения (временная база для процентной ставки 365 дней, для учетной - 360 дней)?

Если P_0 - сумма, выданная при учете векселя, а S_n - сумма, погашаемая по векселю, то S_n можно рассматривать, как результат наращения суммы P_0 в течение 100 дней как по ставке i, так и по ставке $d = 0{,}15$. Тогда

$$1+i\frac{100}{365}=\frac{1}{1-d\frac{100}{360}} ,$$

откуда находим $i = 0{,}158696$ или 15,87 % годовых.

Замечание. Объяснить, почему $i > d$.

Интенсивность процентов в единицу времени δ удобно использовать в теоретических расчетах и обоснованиях финансовых решений. Используя соотношения эквивалентности, можно перейти от непрерывного начисления процентов к дискретному, что более приемлемо на практике. Чаще возникает необходимость в соотношениях эквивалентности непрерывной и сложной процентных ставок. Для эквивалентных сложных процентных ставок δ, i и d имеем:

$$(1+i)^n = e^{n\delta} = (1-d)^{-n} . \qquad (1.36)$$

Отсюда

$$i = e^{\delta} - 1, \quad \delta = \ln(1+i) ; \qquad (1.37)$$

$$d = 1 - e^{-\delta}, \ \delta = -\ln(1-d) . \qquad (1.38)$$

Пример 1.8. Определить: а) эквивалентную сложную процентную ставку по банковскому вкладу сроком на 5 лет, если банк рассчитывает ее, исходя из постоянной годовой интенсивности процентов 0,07; б) эквивалентную сложную учетную ставку при учете в банке долгового обязательства за 3 года до погашения, если банк исходит из постоянной интенсивности процентов год 0,07.

Здесь δ = 0,07. Находим: а) $i = e^{\delta} - 1$ = 0,072508 или 7,25 % годовых; б) $d = 1 - e^{-\delta}$ = 0,067606 или 6,76 % годовых.

Замечание. Объяснить, почему $i > \delta > d$.

Равенство (1.36), кроме соотношений (1.37) и (1.38), позволяет сделать еще один полезный вывод об эквивалентных сложных процентных ставках δ, i и d. Из (1.36) имеем :

$$d\,(1+i) = d\,e^{\delta} = \frac{d}{1-d} = i \ ,$$

а также

$$i\,(1-d) = i\,e^{-\delta} = \frac{i}{1+i} = d \ .$$

Если сумму d отнести к моменту $t = 0$, сумму i – к моменту $t = 1$, а сумма δ выплачивается непрерывно с постоянной скоростью на временном отрезке [0,1] (каждую из этих сумм можно рассматривать как проценты за время [0,1] на заем 1 д.е., произведенный в момент $t = 0$), то последние равенства можно интерпретировать следующим образом. Наращение суммы d по любой из трех эквивалентных ставок в течение 1 единицы времени даст сумму i. В свою очередь, дисконтирование суммы i по любой из трех эквивалентных ставок в течение 1 единицы времени даст сумму d.

Рассмотрим эквивалентность непрерывной δ и номинальных процентных ставок $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$.

Пример 1.9. При условии, что $S_{10} = 2P_0$, найти

а) $i, i^{(4)}, i^{(12)}, i^{(52)}, i^{(365)}, \delta$;

б) $d, d^{(4)}, d^{(12)}, d^{(52)}, d^{(365)}, \delta$.

а) Имеем $S_{10} = P_0\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{10m}$ и $S_{10} = P_0 e^{10\delta}$, срок долга 10 лет. Отсюда

$$i^{(m)} = m\left(2^{\frac{1}{10m}} - 1\right) \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\ln 2}{10}.$$

Составим таблицу значений эквивалентных номинальных процентных ставок:

	1	4	12	52	365	$m \to \infty$
	0,0717773	0,0699918	0,0695153	0,0693661	0,0693321	$\delta =$ 0,069315

б) Имеем $P_0 = S_{10}\left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^{10m}$ и $P_0 = S_{10}e^{-10\delta}$. Отсюда

$$d^{(m)} = m\left(1 - 2^{-\frac{1}{10m}}\right) \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\ln 2}{10}.$$

Составим таблицу значений эквивалентных номинальных учетных ставок:

	1	4	12	52	365	$m \to \infty$

	0,066967	0,068718	0,069115	0,069268	0,069308	δ = 0,069315

Из таблиц видим, что с увеличением m значения $i^{(m)}$ приближаются к значению δ сверху, а значения $d^{(m)}$ приближаются к значению δ снизу.

Докажем, что последовательности эквивалентных процентных ставок $\left\{i^{(m)}\right\}$ и $\left\{d^{(p)}\right\}$ сходятся к δ, причем $\left\{i^{(m)}\right\} \to \delta$ сверху, а $\left\{d^{(p)}\right\} \to \delta$ снизу.

Так как номинальные процентные ставки $i^{(m)}$, $d^{(p)}$, δ эквивалентны, то:

$$\left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{pn} = e^{-n\delta} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mn}.$$

Отсюда

$$d^{(p)} = p(1 - e^{-\frac{\delta}{p}}), \quad i^{(m)} = m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1).$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m(e^{\frac{\delta}{m}} - 1) = \lim_{m\to\infty} m(\frac{\delta}{m}) = \delta.$$

Аналогично находим $\lim\limits_{p\to\infty} d^{(p)} = \delta$. Таким образом, $\lim\limits_{p\to\infty} d^{(p)} = \lim\limits_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$.

Покажем монотонность последовательностей $\left\{i^{(m)}\right\}$ и $\left\{d^{(p)}\right\}$ (см. пример 1.9). Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ для любого x, то

$$d^{(p)} = p\left[1 - \left(1 - \frac{\delta}{p} + \frac{\delta^2}{2p^2} - \frac{\delta^3}{6p^3} + \ldots\right)\right] = \delta - \frac{\delta^2}{2p} + \frac{\delta^3}{6p^2} - \ldots \approx$$

$\approx \delta - \frac{\delta^2}{2p}$, если δ мало. Аналогично,

$$i^{(m)} = m\left[\left(1 + \frac{\delta}{m} + \frac{\delta^2}{2m^2} + \frac{\delta^3}{6m^3} + \ldots\right) - 1\right] = \delta + \frac{\delta^2}{2m} + \frac{\delta^3}{6m^2} + \ldots \approx$$

$\approx \delta + \frac{\delta^2}{2m}$, если δ мало.

Отсюда получаем

$$i^{(1)} > i^{(2)} > i^{(3)} > \ldots$$

и

$$d^{(1)} < d^{(2)} < d^{(3)} < \ldots .$$

Значит, последовательность $\{i^{(m)}\}$ является убывающей, а последовательность $\{d^{(p)}\}$ - возрастающей. Таким образом, эквивалентные номинальные процентные ставки $i^{(m)}$, $d^{(p)}$, δ обладают следующим свойством: последовательность эквивалентных номинальных процентных ставок $\{i^{(m)}\} \to \delta$ сверху, а последовательность эквивалентных номинальных учетных ставок $\{d^{(p)}\} \to \delta$ снизу.

В соотношениях эквивалентности часто пользуются приближенными формулами, если одна из процентных ставок мала. Для этого применяют следующие разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad \text{для любого } x,$$

$$\ln(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots, \qquad -1 < x \le 1,$$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Тогда, например

$$\delta = \ln(1+i) = i - \frac{1}{2}i^2 + \frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{4}i^4 + \ldots .$$

$$d = \frac{i}{1+i} = i(1+i)^{-1} = i(1 - i + i^2 - i^3 + \ldots\ldots) = i - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots.$$

Если i мало, то

$$\delta \approx i - \frac{i^2}{2}; \quad d \approx i - i^2.$$

Аналогично, если δ мало, то

$$i \approx \delta + \frac{\delta^2}{2} \quad \text{и} \quad d \approx \delta - \frac{\delta^2}{2}.$$

Оценить погрешность приближенных равенств можно, оценивая сумму отброшенных членов соответствующего ряда. Это показано в следующем примере.

Пример 1.10. Оценить погрешность приближенного равенства

$$i \approx \delta + \frac{\delta^2}{2}.$$

Так как

$$i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} = \ldots..,$$

то задача сводится к оценке суммы остатка ряда:

$$R_2 = \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \frac{\delta^5}{5!} + \ldots. = \frac{\delta^3}{3!}\left(1 + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta^2}{4 \cdot 5} + \ldots.\right) < \frac{\delta^3}{3!}\left(1 + \frac{\delta}{4} + \left(\frac{\delta}{4}\right)^2 + \ldots.\right).$$

Просуммировав бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в скобках, получим $R_2 < \frac{2\delta^3}{3(4-\delta)}$. Если δ = 0,1, то R_2 < 0,00017. Это значит, что равенство является приближенным с точностью до 0,00017. Если δ = 0,2, то R_2 < 0,0014. Погрешность возросла.

Номинальные и эффективные процентные ставки.

В предыдущих разделах рассматривались годовые номинальные процентные ставки. В этом разделе приводится общее определение номинальной процентной ставки. Оно связано с понятием эффективной процентной ставки.

Определение. Эффективная процентная ставка $i_{ef}^{h}(t)$ за период h единиц времени, начинающийся в момент времени t - это отношение дохода за время h к сумме вложенных средств в начале этого периода.

Если в момент времени t инвестирована сумма P_t, а через время h получена сумма S_{t+h}, то согласно определению,

$$i_{ef}^{h}(t) = \frac{S_{t+h} - P_t}{P_t}.$$

Отсюда

$$S_{t+h} = P_t\left(1 + i_{ef}^{h}(t)\right). \qquad (1.39)$$

Если $h = 1$, то эффективная процентная ставка за единицу времени $i_{ef}(t)$ совпадает с процентной ставкой $i(t)$ за единицу времени в момент t.

Например, сложные проценты начисляются ежемесячно по ставке 1% на сумму вклада на 3 месяца. Тогда 1 месяц - единица времени, процентная ставка за единицу времени равна 1%, а эффективная процентная ставка за 3 месяца равна $(1{,}01^3 - 1)$.

Пусть N - целое число периодов длиной h в сроке долга. Тогда моменты t = 0, 1, 2,..., $N - 1$ можно рассматривать как моменты вложения средств. Применяя формулу (1.39) последовательно на каждом периоде длиной h в течение всего срока T, получим

$$S_N = P_0(1 + i_{ef}^{h}(0))(1 + i_{ef}^{h}(1))\ldots(1 + i_{ef}^{h}(N-1)), \qquad (1.40)$$

где P_0 - сумма, вложенная в момент $t = 0$. (1.40) можно рассматривать как формулу наращения суммы P_0 по переменной эффективной ставке.

Если эффективная ставка за период h не зависит от момента времени t, когда производится вложение средств, т.е. $i_{ef}^{h}(t) = i_{ef}^{h}$ для всех t, то сумма, вырученная к концу срока долга, составит

$$S_N = P_0\left(1+i_{ef}^h\right)^N. \qquad (1.41)$$

Формула (1.41) представляет собой наращение по сложной процентной ставке i_{ef}^h **за период h**. При h = 1 постоянная эффективная процентная ставка за единицу времени совпадает с обычной ставкой сложных процентов i за единицу времени. Постоянную эффективную процентную ставку за единицу времени обозначают через i_{ef}. Таким образом, $i_{ef} = i$. Как и (1.13), (1.41) остается верной для нецелых значений N. Формула (1.14), полученная ранее для наращенной суммы долга по годовой номинальной процентной ставке, является частным случаем (1.41). Действительно, если сложные проценты начисляются m раз в году через равные промежутки времени, то $h = \frac{1}{m}$, эффективная процентная ставка за $\frac{1}{m}$ часть года равна $\frac{1}{m} i^{(m)}$, где $i^{(m)}$ - годовая номинальная процентная ставка. Если срок долга n лет, то $N = mn$ и формула (1.41) приобретает вид (1.14).

В отличие от эффективной, **номинальную** процентную ставку как правило относят **к единице времени**.

Определение. Процентная ставка $j_h(t)$ называется номинальной процентной ставкой за единицу времени по сделке на срок $h > 0$, начинающейся в момент времени t, если эффективной процентной ставкой за период длины h, начинающийся в тот же момент времени t, является величина $h\, j_h(t)$.

Например, определим годовую номинальную ставку, если эффективная ставка за три месяца составляет 3%. Здесь единица измерения времени 1 год, h = 0,25 года, t - момент начала трехмесячной сделки. Тогда по определению 0,03 = $0{,}25 j_h(t)$. Отсюда годовая номинальная процентная ставка $j_h(t) = 0{,}12$.

Таким образом, согласно определению, $i_{ef}^h(t) = h j_h(t)$. При h = 1 номинальная процентная ставка совпадает с эффективной за единицу времени, т.е. $i_{ef}(t) = j_1(t)$. Если номинальная процентная ставка по сделке на срок h является постоянной и не зависит от t, то пишут $j_h(t) = j_h$ для всех t. При этом $i_{ef}^h = hj_h$. Формулы (1.39) - (1.41) для расчетов с использованием номинальных процентных ставок имеют вид:

$$S_{t+h} = P_t\left(1 + h j_h(t)\right) \quad . \qquad (1.42)$$

$$S_N = P_0(1 + h j_h(0))(1 + h j_h(1))\ldots(1 + h j_h(N-1)), \quad (1.43)$$

$$S_N = P_0\left(1 + h\, j_h\right)^N \quad . \qquad (1.44)$$

Пример 1.11. В августе 2001 года номинальные годовые процентные ставки привлечения на депозит Центрального Банка РФ рублевых вкладов составляли в зависимости от срока:

1 день - 2,0 %

3 дня - 2,5 %

7 дней - 7,5 %

Вклады сроком на 1 день называют овернайт (“overnight money”).

Здесь единицей измерения времени является один год, а рассматриваемый момент времени, когда производится вложение средств, обозначим через t_0. Составим следующую таблицу:

Срок h	1/365	3/365	7/365
$j_h(t_0)$	0,02	0,025	0,075

Накопление по вкладу 1000 д.е. на срок, например, 7 дней согласно формуле (1.42) равно

$$1000\left(1 + \frac{7}{365}0{,}075\right) = 1001{,}44 \,.$$

Накопление по вкладу на срок 3 дня можно рассчитать двумя способами - по формуле (1.42):

$$1000\left(1 + \frac{3}{365}0{,}025\right) = 1000{,}21$$

и по формуле (1.44), если считать номинальную процентную ставку для инвестиций на один день постоянной:

$$1000\left(1+\frac{1}{365}0{,}02\right)^{3}=1000{,}16 .$$

Как видим, два последних результата не совпадают. Это можно объяснить тем, что Центральный Банк предпочитает принимать вклады на более длительный срок.

Определение. Значение предела $\delta(t)$ номинальной процентной ставки $j_h(t)$, когда срок сделки h стремится к нулю, называется интенсивностью процентов в единицу времени в момент t. Таким образом, согласно определению,

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} j_h(t) . \qquad (1.45)$$

На практике интенсивность процентов в данный момент времени полагают приблизительно равной годовой номинальной процентной ставке по «overnight money». Понятие интенсивности процентов в данный момент времени означает непрерывное начисление сложных процентов. Поэтому $\delta(t)$ называют также процентной ставкой за единицу времени при непрерывном начислении процентов (силой роста). В случае, когда интенсивность процентов является постоянной величиной, т.е. $\delta(t) = \delta$ для всех t, проценты по постоянной силе роста δ начисляются непрерывно с постоянной скоростью (см. вывод формулы 1.15). Получим формулу наращенной суммы долга при непрерывном начислении процентов, когда интенсивность процентов $\delta(t)$ является функцией времени. Из формул (1.42) и (1.45) имеем:

$$\delta(t) = \lim_{h\to 0} j_h(t) = \lim_{h\to 0}\frac{S_{t+h}-P_t}{P_t\, h} = \lim_{h\to 0}\frac{S_{t+h}-S_t}{S_t\, h}=\frac{S_t^{/}}{S_t} .$$

Таким образом, требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{S_t'}{S_t} = \delta(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $S_t(t=0) = P_0$. Получаем

$$S_t = P_0 e^{\int_0^t \delta(y)dy} . \quad (1.46)$$

В частном случае, когда $\delta(t) = \delta$ для всех t, эта формула имеет вид:

$$S_t = P_0 e^{t\delta}, \quad (1.47)$$

что совпадает с выражением (1.15), полученным раньше другим способом.

На практике большое значение имеет понятие годовой эффективной процентной ставки при начислении процентов m раз в году. В этом случае годовая эффективная процентная ставка определяется следующим образом.

Определение. Годовая эффективная процентная ставка при начислении процентов m раз в году i_{ef} - это годовая ставка сложных процентов, начисляемых 1 раз в году, эквивалентная годовой номинальной процентной ставке $i^{(m)}$.

Таким образом, согласно определению, $i_{ef} = i$, где i - годовая ставка сложных процентов, начисляемых один раз в конце года, и обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m – разовое начисление сложных процентов в году по ставке $\frac{i^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то из эквивалентности процентных ставок следует равенство множителей наращения:

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mn}.$$

Отсюда

$$i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} - 1. \quad (1.48)$$

Согласно определению эффективной процентной ставки, i измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год от начисления процентов. Покажем это. Рассмотрим процесс накопления процентов за 1 год. Сложные проценты начисляются через равные промежутки времени m раз в году в конце каждого периода длиной $\frac{1}{m}$ по ставке $\frac{i^{(m)}}{m}$. Проценты за первый период длиной $\frac{1}{m}$ составят $I_1 = \frac{i^{(m)}}{m} P_0$. Согласно свойству сложных процентов, проценты $I_1, I_2, \ldots, I_m$ за каждый период длиной $\frac{1}{m}$ в году - члены геометрической прогрессии с первым членом I_1 и знаменателем $(1+\frac{i^{(m)}}{m})$ (см. (1.11)). Накопленные проценты за весь год равны сумме $I(1) = I_1 + I_2 + \ldots + I_m$. По формуле суммы m членов геометрической прогрессии получаем

$$I(1) = P_0\left((1+\frac{i^{(m)}}{m})^m - 1\right).$$

Следовательно, реальный относительный доход, получаемый в целом за год от начисления процентов, составляет

$$\frac{I(1)}{P_0} = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 \quad .$$

Тогда из (1.48) следует $i = \frac{I(1)}{P_0}$. Поэтому именно годовая эффективная процентная ставка i рассматривается инвесторами как показатель реальной эффективности финансовой сделки.

Сравним i и $i^{(m)}$. Из формулы (1.48) имеем:

$$i = \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 = 1 + i^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 + \ldots\ldots - 1 = i^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 + \ldots\ldots$$

Так как $m \geq 1$, то $i \geq i^{(m)}$. Последнее неравенство можно объяснить, используя свойства наращенной суммы долга. Действительно, чем больше m, тем быстрее процесс наращения по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$. С другой стороны, чем больше процентная ставка, тем быстрее процесс наращения. Так как ставки i и $i^{(m)}$ эквивалентны, то для достижения одинакового результата наращения ставка i должна быть больше.

Пример 1.12. Какой эффективной процентной ставке соответствует ежеквартальное начисление сложных процентов по номинальной годовой процентной ставке 13 %?

Здесь $i^{(4)} = 0{,}13$. По формуле (1.48) находим

$$i = \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4 - 1 = 0{,}136476.$$

Значит, реальный относительный доход за год для инвестора больше 13 % и составляет примерно 13,65 %.

Если в контракте указаны требуемая годовая эффективная процентная ставка i и число начислений процентов в году m, то из формулы (1.48) можно найти соответствующую годовую номинальную процентную ставку:

$$i^{(m)} = m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right). \qquad (1.49)$$

Пример 1.13. В контракте указана годовая эффективная процентная ставка 20 %. Банк начисляет проценты два раза в год. Какую номинальную годовую процентную ставку должен назначить банк?

По условию $i = 0{,}2$; $m = 2$. По формуле (1.49) находим

$$i^{(2)} = 2\left((1+0{,}2)^{\frac{1}{2}} - 1\right) = 0{,}190890,$$

т.е. $i^{(2)} \approx 19{,}1\%$.

Определим годовую эффективную учетную ставку d_{ef} при начислении процентов m раз в году.

Определение. Годовая эффективная учетная ставка при начислении процентов m раз в году d_{ef} - это годовая учетная ставка сложных процентов, начисляемых и удерживаемых один раз в году, эквивалентная годовой номинальной учетной ставке $d^{(m)}$.

Таким образом, согласно определению, $d_{ef} = d$, где d - годовая учетная ставка сложных процентов, удерживаемых один раз в начале года, обеспечивающая тот же финансовый результат, что и m – разовое дисконтирование в году по ставке $\frac{d^{(m)}}{m}$. Если срок долга n лет, то из эквивалентности процентных ставок следует равенство дисконтных множителей:

$$(1-d)^n = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mn}.$$

Отсюда

$$d = 1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}. \qquad (1.50)$$

Годовая эффективная учетная ставка d измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год при m – разовом дисконтировании в году. В этом можно убедиться, рассматривая процесс дисконтирования в течение одного года и учитывая свойства сложных дисконтов.

Сравним d и $d^{(m)}$. Из формулы (1.50) имеем

$$d = 1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} = 1-\left[1-d^{(m)}+\frac{m(m-1)}{2}\left(-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2}+.....\right] = d^{(m)}-\frac{m(m-1)}{2}\left(\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2}+.....$$

Так как $m \geq 1$, то $d \leq d^{(m)}$. Последнее неравенство можно объяснить, используя свойства современной величины суммы долга. Действительно, чем больше m, тем медленнее процесс дисконтирования по номинальной учетной ставке $d^{(m)}$. С другой стороны, с уменьшением процентной ставки процесс дисконтирования замедляется. Так как ставки d и $d^{(m)}$ эквивалентны, то для достижения одинакового результата дисконтирования ставка d должна быть меньше.

Пример 1.14. Какой годовой эффективной учетной ставкой можно заменить в контракте годовую номинальную учетную ставку 5 % при поквартальном учете суммы погашаемого долга ?

Здесь $m = 4$, $d^{(4)} = 0{,}05$. По формуле (1.50) находим

$$d = 1 - \left(1 - \frac{d^{(4)}}{4}\right)^4 = 0{,}04907.$$

Для участников сделки безразлично, производить дисконтирование 4 раза в году в начале каждого квартала по ставке $\frac{d^{(4)}}{4} = 0{,}0125$ или один раз в начале года по ставке 0,04907. Финансовые обязательства сторон сохраняются.

Если требуется определить годовую номинальную учетную ставку $d^{(m)}$ при заданных d и m, то из формулы (1.50) получаем

$$d^{(m)} = m\left(1 - (1-d)^{\frac{1}{m}}\right). \qquad (1.51)$$

Переменные процентные ставки.

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. В инвестиционных расчетах понятие переменной процентной ставки является одним из важнейших.

Определение. Процентная ставка называется переменной, если она изменяет свое значение в течение срока долга.

Рассмотрим дискретные переменные процентные ставки. Пусть n - срок долга, $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, где n_j - период в сроке долга, когда применяется процентная ставка i_j или учетная ставка d_j, $j = 1,2,\ldots, k$.

<u>1) Наращение и дисконтирование по простой переменной процентной ставке.</u>

Согласно формуле (1.8), проценты за каждый период n_j в сроке долга составляют

$$I(n_j) = P_0 n_j i_j,\ \ j = 1,2,\dots,k\ .$$

Проценты за весь срок долга

$$I(n) = \sum_{j=1}^{k} I(n_j) = P_0 \sum_{j=1}^{k} n_j i_j\ .$$

Тогда наращенная сумма к концу срока долга n составит:

$$S_n = P_0 + I(n) = P_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{k} n_j i_j \right). \qquad (1.52)$$

Предположим, что известна сумма погашаемого долга S_n. Формула современной величины суммы S_n при математическом ее учете по простой переменной процентной ставке имеет вид:

$$P_0 = \frac{S_n}{1 + \sum_{j=1}^{k} n_j i_j}. \qquad (1.53)$$

Применяя формулу (1.20) последовательно для периодов n_k, n_{k-1}, …,n_2 , n_1, получим формулу современной величины суммы S_n при банковском ее учете по простой переменной учетной ставке:

$$P_0 = S_n \left(1 - \sum_{j=1}^{k} n_j d_j \right). \qquad (1.54)$$

Соответственно, формула наращенной суммы долга по простой переменной учетной ставке имеет вид:

$$S_n = \frac{P_0}{1 - \sum_{j=1}^{k} n_j d_j}. \qquad (1.55)$$

2) Наращение и дисконтирование по сложной переменной процентной ставке.

Применяя формулу (1.13) последовательно для каждого периода наращения n_1, n_2, … , n_k , получаем формулу наращенной суммы долга по переменной сложной процентной ставке:

$$S_n = P_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}....(1+i_k)^{n_k}. \qquad (1.56)$$

Если известна сумма погашаемого долга S_n, то, применяя формулу (1.17) или (1.21) последовательно для каждого периода дисконтирования n_k, n_{k-1}, … , n_2, n_1, получим формулы приведенной к моменту t = 0 величины суммы S_n при математическом и банковском ее учете по сложной переменной процентной ставке:

$$P_0 = \frac{S_n}{(1+i_k)^{n_k}(1+i_{k-1})^{n_{k-1}}....(1+i_1)^{n_1}}. \qquad (1.57)$$

$$P_0 = S_n(1-d_k)^{n_k}(1-d_{k-1})^{n_{k-1}}....(1-d_1)^{n_1}. \qquad (1.58)$$

Формулы (1.40) и (1.43) можно рассматривать как формулы наращения суммы долга по переменным эффективным и номинальным процентным ставкам.

Пример 1.15. Ожидаемая эффективная процентная ставка на первый год – 10 %, на второй – 12 %, на третий и четвертый – 14 %. В конце четвертого года заемщик обязуется погасить долг в размере 2000 д.е. Какова может быть сумма кредита?

Примем за единицу измерения времени 1 год. Тогда по формуле (1.57) получаем

$$P_0 = \frac{2000}{(1+0{,}14)^2(1+0{,}12)(1+0{,}1)} = 1249{,}14 \text{ (д.е.)}.$$

<u>3) Наращение и дисконтирование по непрерывным переменным процентным ставкам.</u> Переменную непрерывную процентную ставку $\delta(t)$ называют интенсивностью процентов или силой роста в единицу времени в момент t. Формула наращенной суммы долга при непрерывном начислении процентов, когда интенсивность процентов $\delta(t)$ является функцией времени, имеет вид (1.46):

$$S_t = P_0 e^{\int_0^t \delta(y)dy}.$$

Задавая конкретный вид зависимости $\delta(t)$, моделируют поведение интенсивности процентов во времени. Рассмотрим наиболее часто используемые формулы для $\delta(t)$. Для этого введем обозначения. Обозначим через $F(t)$ и $\nu(t)$ множитель наращения и дисконтный множитель соответственно по переменной силе роста $\delta(t)$ в момент t, где $t \geq 0$. $F(t)$ – это накопление (стоимость) в момент t единичного вклада, сделанного в момент $t = 0$. $\nu(t)$ - это современная стоимость 1 д.е., подлежащей выплате в момент t. Для вклада, сделанного в момент $t = 0$, множитель наращения в момент t имеет вид:

$$F(t) = e^{\int_0^t \delta(y)dy}. \qquad (1.59)$$

Тогда дисконтный множитель в момент t равен

$$\nu(t) = e^{-\int_0^t \delta(y)dy} \qquad (1.60)$$

Если $\delta(t)$ интегрируема, то $F(t)$ и $\nu(t)$ являются непрерывными функциями времени t. В случае, когда интенсивность процентов является постоянной величиной, т.е. $\delta(t) = \delta$ для всех t, множитель наращения и дисконтный множитель имеют вид $F(t) = e^{\delta t}$ и $\nu(t) = e^{-\delta t}$. Наращенная сумма долга в момент t может быть найдена по формуле

$$S_t = P_0 F(t) = P_0 e^{\int_0^t \delta(y)dy}, \qquad (1.61)$$

где P_0 - первоначальная сумма долга в момент $t = 0$. Современная стоимость суммы S_t, подлежащей выплате в момент t, равна

$$P_0 = S_t \nu(t) = S_t e^{-\int_0^t \delta(y)dy}. \qquad (1.62)$$

1. $\delta(t)$ **- линейная функция времени**, т.е. $\delta(t) = \delta_0 + at$.

Здесь δ_0 – начальное значение силы роста, a - годовой прирост силы роста. Так как $a = \delta(t + 1) - \delta(t)$, то a может быть положительным, отрицательным или равно нулю, т.е. возможны значения $a > 0$, $a < 0$, $a = 0$. Значение $a = 0$

соответствует постоянной силе роста δ_0. График зависимости интенсивности процентов от времени имеет вид, показанный на рис. 1.1.5.

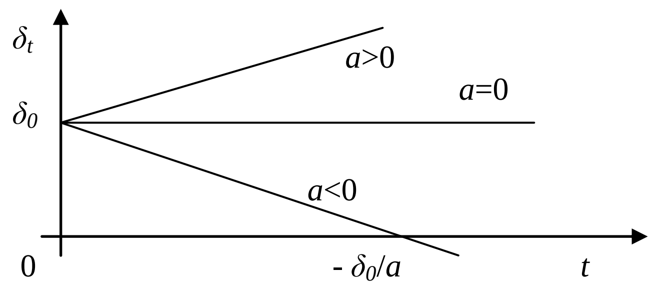


Рис. 1.1.5

Как видим, в случае, когда предполагается линейное уменьшение интенсивности процентов, срок долга не должен превышать величину $-\frac{\delta_0}{a}$, где $a < 0$.

Рассмотрим поведение множителя наращения для всех трех случаев. Так как

$$\int_0^t \delta(y)dy = \int_0^t (\delta_0 + ay)dy = \delta_0 t + \frac{at^2}{2},$$

то

$$F(t) = e^{\delta_0 t + \frac{at^2}{2}}. \qquad (1.63)$$

Отсюда следует, что $F(t)\Big|_{a>0} > F(t)\Big|_{a=0} > F(t)\Big|_{a<0}$ для каждого t, причем $F(t)$ = 1 в момент t = 0. Если $a \geq 0$, то $F'(t) = e^{\delta_0 t + \frac{at^2}{2}}(\delta_0 + at) > 0$, $F''(t) > 0$. Характер зависимости множителя наращения $F(t)$ от времени для случаев, когда $a > 0$ и $a = 0$ показан на рис. 1.1.6. При $a = 0$ множитель наращения имеет вид $F(t) = e^{\delta_0 t}$.

Если $a<0$, то производная $F'(t)$ в точке $-\frac{\delta_0}{a}$ изменяет свой знак с “+” на “–“ , а функция $F(t)$ в этой точке достигает своего максимального значения, причем

$$\max F(t)\Big|_{t=-\frac{\delta_0}{a}} = e^{-\frac{\delta_0^2}{2a}} > 1.$$

Из этого в частности следует, что задача об увеличении суммы долга в число раз, превышающее значение $e^{-\frac{\delta_0^2}{2a}}$, в случае $a<0$ является некорректной. При построении графика функции $F(t)$ учтем, что при $a<0$ множитель наращения $F(t) \geq 1$, если $\delta_0 t + \frac{at^2}{2} \geq 0$, т.е. $0 \leq t \leq -\frac{2\delta_0}{a}$ и $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$. График зависимости множителя наращения $F(t)$ от времени при $a<0$, приведен на рис. 1.1.6. Поведение множителя наращения в этом случае показывает, что процесс наращения суммы долга прекращается в момент $-\frac{\delta_0}{a}$, что подтверждает ранее сделанный вывод о сроке долга для $a<0$.

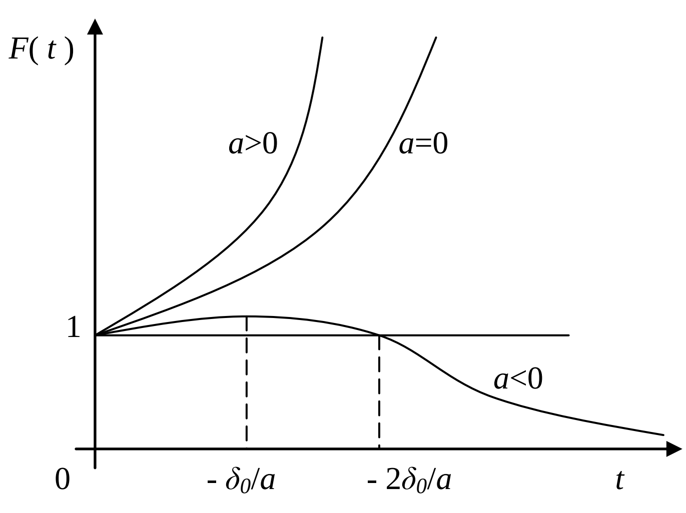


Рис. 1.1.6

Пример 1.16. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - линейная функция времени. Начальное значение силы роста равно 0,1. Годовой прирост интенсивности процентов составляет: а) 0,025; б) 0; в) - 0,025. Рассчитать значения множителя наращения для следующих сроков долга: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 лет.

Согласно условию, $\delta(t) = \delta_0 + at$. Здесь $\delta_0 = 0{,}1$. Значения параметра a следующие: а) $a = 0{,}025$; б) $a = 0$; в) $a = -0{,}025$. Множитель наращения в каждом из трех случаев имеет вид:

а) $F(t) = e^{0.1t + \frac{0.025t^2}{2}}$; б) $F(t) = e^{0.1t}$ в) $F(t) = e^{0.1t - \frac{0.025t^2}{2}}$.

Значения множителей наращения для указанных сроков приведены в таблице:

	a	3	4	5	6	7	8	9
а)	0,025	1,511	1,822	2,254	2,858	3,715	4,953	6,770
б)	0	1,350	1,492	1,649	1,822	2,014	2,226	2,460
в)	–0,025	1,206	1,221	1,206	1,162	1,091	1,000	0,894

Как видим, результаты вычислений соответствуют характеру кривых на рис. 1.1.6. В случае, когда $a = -0{,}025$ максимальное значение множителя наращения равно $e^{-\frac{\delta_0^2}{2a}} = 1{,}221$ и достигается оно при сроке долга, равном $-\frac{\delta_0}{a}$ = 4 года, что соответствует таблице.

Пример 1.17. 1 января 1998 года клиент положил в банк 1500 д.е. К 1 января 2002 года его вклад вырос до 1832,105 д.е. Предполагается, что интенсивность процентов в течение всего срока вклада являлась линейной функцией времени. Найти годовую интенсивность процентов на 1 января 2000 года.

Момент $t = 0$ соответствует 1 января 1998 года. Множитель наращения $F(0) = 1$, $F(4) = \frac{1832{,}105}{1500} = 1{,}221403$. Требуется найти интенсивность процентов в момент $t = 2$, т.е. $\delta(2)$. Так как $\delta(t)$ - линейная функция времени (параметры которой неизвестны), то $\int_0^t \delta(y)dy$ является квадратичной функцией. Производная квадратичной функции $f(x)$ обладает следующим свойством:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Так как

$$F(t) = e^{\int_0^t \delta(y)dy},$$

то

$$\ln F(t) = \int_0^t \delta(y)dy$$

является квадратичной функцией на отрезке [0, 4]. Тогда по свойству производной квадратичной функции

$$(\ln F(t))' = \frac{\ln F(t+h) - \ln F(t-h)}{2h}.$$

Так как линейная функция является непрерывной, то по свойству интеграла с переменным верхним пределом

$$(\ln F(t))' = \frac{d}{dt}\int_0^t \delta(y)dy = \delta(t).$$

Из последних двух равенств следует

$$\delta(t) = \frac{\ln F(t+h) - \ln F(t-h)}{2h}.$$

Так как $t = 2$, $h = 2$, то

$$\delta(2) = \frac{\ln F(4) - \ln F(0)}{4} = \frac{1}{4}\ln F(4) = 0{,}05.$$

Этот ответ можно проверить. Значение $F(4)$ совпадает со значением множителя наращения для 4-летнего срока долга в третьей строке таблицы предыдущего примера. По значениям параметров δ_0 = 0,1 и a = – 0,025 для этой строки находим

$$\delta(2) = \delta_0 + 2a = 0{,}05.$$

Следовательно, годовая интенсивность процентов на 1 января 2000 года была 0,05.

2. $\delta(t)$ **- показательная функция времени**, т.е. $\delta(t) = \delta_0\, a^t$.

Здесь δ_0 – начальное значение силы роста, a - годовой темп изменения силы роста. Так как $a = \dfrac{\delta(t+1)}{\delta(t)}$, то возможны значения $a > 1$, $0 < a < 1$, $a = 1$. Значение $a = 1$ соответствует постоянной силе роста δ_0. График зависимости интенсивности процентов от времени имеет вид, показанный на рис. 1.1.7 .

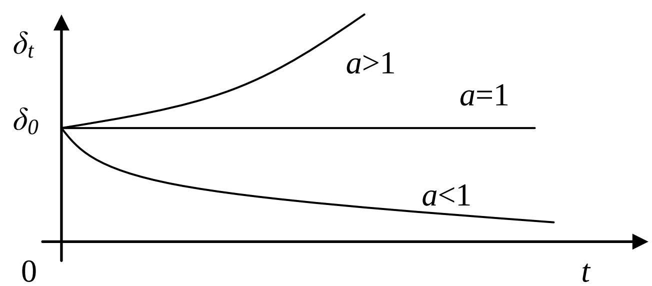


Рис. 1.1.7

Из определения параметра a следует, что $\dfrac{\delta(t+1)-\delta(t)}{\delta(t)} = a - 1$. Это означает, что если предполагается изменение интенсивности процентов по показательному закону, то относительное изменение силы роста за год является величиной постоянной и равной $a - 1$. Причем $a - 1 > 0$, если интенсивность процентов в единицу времени возрастает, и $a - 1 < 0$, если интенсивность процентов уменьшается.

Рассмотрим поведение множителя наращения для всех трех случаев значений a. Если $a = 1$, то множитель наращения имеет вид $F(t) = e^{\delta_0 t}$. При $a > 0$, $a \neq 1$ имеем

$$\int_0^t \delta(y)dy = \int_0^t \delta_0 a^y dy = \frac{\delta_0}{\ln a}(a^t - 1).$$

Тогда

$$F(t) = e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^t - 1)}. \qquad (1.64)$$

При любом $a > 0$ производная $F^{/}(t) > 0$. Значит, во всех трех случаях $F(t)$ – возрастающая функция времени. Кроме того, $F^{//}(t) > 0$, если $a \geq 1$. Чтобы построить кривые наращения, преобразуем выражение (1.64). Разложим a^t в степенной ряд:

$$a^t = 1 + t\ln a + \frac{t^2 \ln^2 a}{2} + \frac{t^3 \ln^3 a}{6} + \ldots.$$

Так как

$$\frac{\delta_0}{\ln a}(a^t - 1) = \delta_0 (t + \frac{1}{2}t^2 \ln a + \frac{1}{6}t^3 \ln^2 a + \ldots.),$$

то

$$F(t) = e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^t - 1)} = e^{\delta_0 t} e^{\frac{1}{2}\delta_0 t^2 \ln a + \frac{1}{6}t^3 \ln^2 a + \ldots.}$$

Отсюда следует, что $F(t)\Big|_{a>1} > F(t)\Big|_{a=1} > F(t)\Big|_{a<1} \geq 1$ для каждого t, причем $F(t) = 1$ в момент $t = 0$. Кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = e^{-\frac{\delta_0}{\ln a}} > 1$ при $0 < a < 1$. Из этого, в частности, следует, что задача об увеличении суммы долга в число раз, превышающих значение $e^{-\frac{\delta_0}{\ln a}}$, в случае $0 < a < 1$ является некорректной. Характер зависимости множителя наращения $F(t)$ от времени показан на рис. 1.1.8.

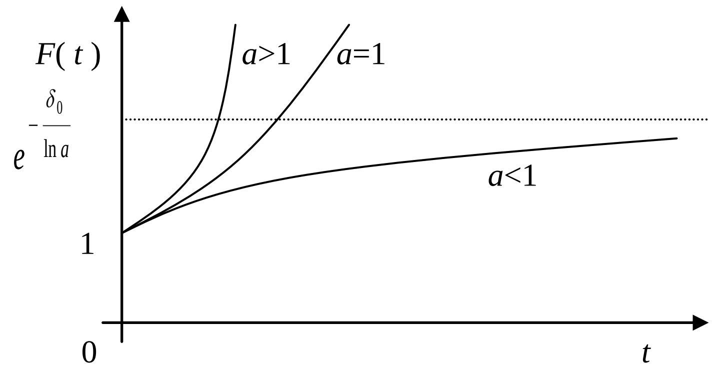


Рис. 1.1.8

Пример 1.18. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - показательная функция времени. Интенсивность процентов а) увеличивается ежегодно на 10%; б) уменьшается ежегодно на 10%; в) остается постоянной. Начальное значение силы роста 0,1. Найти срок удвоения суммы долга.

Согласно условию, $\delta(t) = \delta_0 a^t$. Здесь $\delta_0 = 0{,}1$. В случае а) $a - 1 = 0{,}1$. Следовательно $a = 1{,}1$. В случае б) $a - 1 = -0{,}1$. Следовательно, $a = 0{,}9$. В случае в) $a = 1$. $F(n) = 2$, где n – искомый срок. Для случая б) рассчитаем величину $e^{-\frac{\delta_0}{\ln a}} = 2{,}583 > 2$. Следовательно, задача является корректной и ее решение существует. Для случаев а) и б) разрешим равенство $F(n) = e^{\frac{\delta_0}{\ln a}(a^n - 1)}$ относительно n:

$$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{\ln a}{\delta_0}\ln F(n)\right)}{\ln a}.$$

Разрешая равенство $F(n) = e^{n\delta_0}$ относительно n, получим для случая в):

$$n = \frac{\ln F(n)}{\delta_0}.$$

Тогда в случае а) $n = 5{,}322$ или 5 лет и 117 дней; в случае б) $n = 12{,}438$ или 12 лет и 160 дней; в случае в) $n = 6{,}931$ или 6 лет и 340 дней. Полученные значения сроков долга соответствуют характеру кривых наращения на рис. 1.1.8.

Замечание. Убедиться самостоятельно, что если $F(n) = 3$, то в случае б) задача не имеет решения.

Пример 1.19. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - показательная функция $\delta(t) = 0{,}09(0{,}9)^t$. Найти современную стоимость 1000 д.е., подлежащих выплате через 3 года.

По формуле (1.60) дисконтный множитель, соответствующий данному закону изменения интенсивности процентов, имеет вид

$$v(t) = e^{-\int_0^t \delta(y)dy} = e^{-\int_0^t 0{,}09(0{,}9)^y dy} = e^{-\frac{0{,}09}{\ln 0{,}9}\left(0{,}9^t - 1\right)}.$$

Тогда по формуле (1.62) находим современную стоимость 1000 д.е., подлежащих выплате через 3 года:

$$P_0 = 1000\, e^{-\frac{0{,}09}{\ln 0{,}9}(0{,}9^3 - 1)} = 793{,}35.$$

3. $\delta(t)$ **- кусочно – постоянная функция**.

Этот случай удобнее рассмотреть на конкретном примере. Предположим, что

$$\delta(t) = \begin{cases} 0.1, & 0 \le t < 4 \\ 0.09, & 4 \le t < 10 \\ 0.07, & t \ge 10 \end{cases}.$$

Кусочно-постоянная функция является интегрируемой. Найдем множитель наращения $F(t)$. Если $0 \le t < 4$, то

$$\int_0^t \delta(y)dy = \int_0^t 0{,}1dy = 0.1t.$$

Если $4 \le t < 10$, то

$$\int_0^t \delta(y)dy = \int_0^4 0.1dy + \int_4^t 0.09dy = 0.04 + 0.09t.$$

Если $t \ge 10$, то

$$\int_0^t \delta(y)dy = \int_0^4 0.1dy + \int_4^{10} 0.09dy + \int_{10}^t 0.07dy = 0.24 + 0.07t.$$

Таким образом,

$$F(t)=\begin{cases} e^{0.1t}, \ 0 \le t < 4 \\ e^{0.04+0.09t}, \ 4 \le t < 10 \\ e^{0.24+0.07t}, \ t \ge 10 \end{cases}.$$

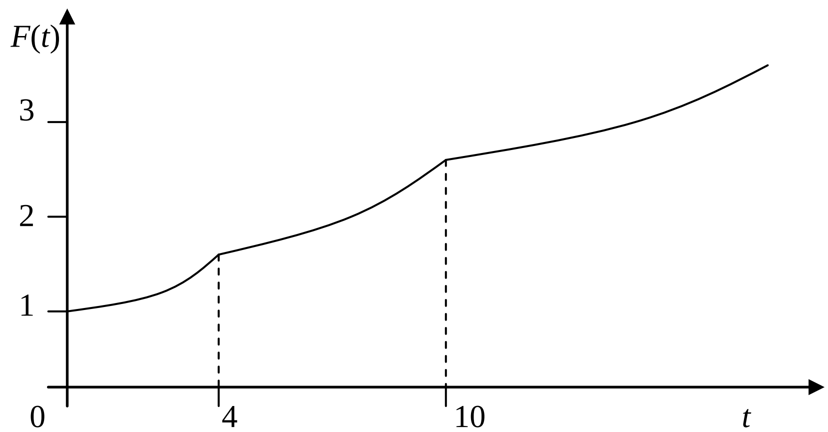


Рис. 1.1.9

Предположим, время измеряется в годах. Найдем наращенную сумму вклада 100 д.е., произведенного в момент $t = 0$, через 4 года и через 12 лет. По формуле (1.61) получаем $S_t = P_0F(t) = P_0e^{0.04+0.09t}$, если срок долга $4 \le t < 10$, и $S_t = P_0F(t) = P_0e^{0.24+0.07t}$ при $t \ge 10$. Тогда $S_4 = 100e^{0,4} = 149{,}182$ (д.е.) и $S_{12} = 100e^{1,08} = 294{,}467$ (д.е.).

4) Формула Студли.

Еще один пример формулы для $\delta(t)$ является формула Студли, которая может быть записана следующим образом:

$$\delta(t) = p + \frac{s}{1+re^{st}}. \qquad (1.65)$$

Параметры p, r и s выбираются так, чтобы моделировать плавное убывание или плавное возрастание интенсивности процентов. Подробнее об этой формуле можно посмотреть в [3].

1.2. Доходность финансовой операции.

Определение. Финансовой называется операция, начало и конец которой характеризуются денежными суммами $P(0)$ и $P(T)$ соответственно, а цель которой - наращение суммы вложенных средств $P(0)$.

В определении под $P(0)$ понимают реально вложенные средства в момент $t = 0$, под $P(T)$ – реально вырученные денежные средства в результате операции, срок которой T единиц времени. Эффект от вложения естественно измерять в виде процентной ставки наращения, которую в этом случае называют доходностью.

Определение. Ставка простых или сложных процентов, с помощью которой измеряют эффективность финансовой операции, называется доходностью финансовой операции за единицу времени.

Согласно определению, доходность финансовой операции за единицу времени - это положительное число $\bar{r}$, удовлетворяющее равенству:

$$P(0)(1 + \bar{r}T) = P(T) \qquad (2.1)$$

или

$$P(0)(1 + \bar{r})^T = P(T). \qquad (2.2)$$

Если время измеряется в годах, то $\bar{r}$ - среднегодовая доходность операции.

Таким образом, финансовой операции ставится в соответствие эквивалентная операция наращения суммы $P(0)$ по ставке $\bar{r}$ в течение времени T. Такой подход позволяет сравнить полученное значение доходности с доходностями по альтернативным вложениям средств.

Кроме того, можно говорить о доходности за весь срок операции $[0, T]$, определяемой как положительное число r, удовлетворяющее равенству

$$P(0)(1 + r) = P(T). \qquad (2.3)$$

Отсюда

$$r = \frac{P(T) - P(0)}{P(0)}.$$

Здесь r показывает эффект от вложения, приходящийся на 1 единицу вложенных средств. Этот вид доходности применяется, например, при оценке инвестиций в ценные бумаги.

Учет налогов и инфляции.

Налоги и инфляция заметно влияют на эффективность финансовой операции. Рассмотрим учет налогов. Налог начисляется, как правило, на проценты, получаемые при размещении денежной суммы в рост. Предположим, на сумму P_0 в течение времени n начислялись проценты по ставке i, g - ставка налога на проценты. Тогда величина процентов

$$I(n) = S_n - P_0,$$

а сумма налога $G_n = g\, I(n)$. Наращенная сумма после выплаты налога составляет

$$P(n) = S_n - G_n.$$

Так как $P(n) < S_n$, то учет налогов фактически сокращает ставку наращения. Итак,

$$P(n) = S_n - G_n = S_n - g\, I(n) = S_n - g\,(S_n - P_0) = S_n\,(1 - g) + gP_0.$$

Если i - простая процентная ставка, то $S_n = P_0(1 + in)$. Тогда

$$P(n) = P_0(1 + i(1 - g)n).$$

Видим, что фактически наращение производится по ставке $i(1 - g) < i$.

Если i – сложная процентная ставка, то $S_n = P_0(1 + i)^n$. Тогда

$$P(n) = P_0\,((1 + i)^n(1 - g) + g).$$

Пример 2.1. При выдаче кредита на 2 года под годовую сложную процентную ставку 0,08 кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

Если P_0 - сумма кредита, а S_n - сумма погашаемого долга, то $S_n = P_0(1 + i)^n$, где i = 0,08 , n = 2. Сумма комиссионных cP_0, где c = 0,005. Тогда сумма, фактически выданная в долг, составит $P(0) = P_0(1 - c)$. После выплаты налога у кредитора останется $P(n) = P_0\,((1 + i)^n(1 - g) + g)$, где g = 0,1 - ставка налога. Уравнение доходности имеет вид $P(n) = P(0)(1 + \bar{r})^n$. Разрешая это уравнение относительно $\bar{r}$, получим

$$\bar{r} = \left(\frac{P(n)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{(1+i)^n(1-g)+g}{1-c}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = 0{,}07496.$$

Заметим, что без учета налога (g = 0) доходность операции составила бы 0,08271.

Инфляция – обесценение денег, проявляющееся в росте цен на товары и услуги, что влечет за собой снижение покупательной способности денег.

Инфляцию характеризуют два количественных показателя – индекс цен и темп инфляции. Предположим, выбрана единица времени. Рассмотрим отрезок времени $[0, t]$, длина которого t единиц времени от начального момента $t = 0$.

Индекс цен за время $[0, t]$ - число

$$J(t) = \frac{K(t)}{K(0)},$$

показывающее во сколько раз выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$.

Темп инфляции за время $[0, t]$ - число

$$H(t) = \frac{K(t) - K(0)}{K(0)},$$

показывающее на сколько процентов выросла стоимость потребительской корзины за период времени $[0, t]$. Так как $H(t) = \frac{K(t)}{K(0)} - 1$, то соотношения между темпом инфляции и индексом цен имеют вид:

$$H(t) = J(t) - 1 \qquad (2.4)$$

и

$$J(t) = 1 + H(t) \qquad (2.5)$$

для любого периода времени[0, t].

Пусть $[0, t] = \bigcup_{k=1}^{n} [t_{k-1}, t_k]$, где [0, t_1], … , [t_{n-1}, t_n] - отрезки времени в сроке [0, t] ($t_0 = 0$, $t_n = t$), длины которых t_1, $(t_2 - t_1)$,…,$(t_n - t_{n-1})$ единиц времени. $j(0, t_1)$,…, $j(t_{n-1}, t_n)$ и $h(0, t_1)$,…, $h(t_{n-1}, t_n)$ – индексы цен и темпы инфляции за периоды [0, t_1], … , [t_{n-1}, t_n] соответственно. Согласно (2.5),

$$j(t_{k-1}, t_k) = 1 + h(t_{k-1}, t_k), \ k = 1,2,\dots,n.$$

$h(t_{k-1}, t_k)$ - темп инфляции за $(t_k - t_{k-1})$ единиц времени за период [t_{k-1}, t_k]. Индекс цен $j(t_{k-1}, t_k)$ за период [t_{k-1}, t_k] показывает, во сколько раз увеличились цены за этот период по отношению к уровню цен предыдущего периода. Тогда получаем следующие соотношения для индекса цен и темпа инфляции за время [0, t]:

$$J(t) = j(0, t_1)\, j(t_1, t_2) \dots j(t_{n-1}, t_n), \qquad (2.6)$$

$$J(t) = (1 + h(0, t_1))(1 + h(t_1, t_2))\dots(1 + h(t_{n-1}, t_n)), \qquad (2.7)$$

$$1 + H(t) = (1 + h(0, t_1))(1 + h(t_1, t_2))\dots(1 + h(t_{n-1}, t_n)). \qquad (2.8)$$

Пусть j_k и h_k - индекс цен и темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке [t_{k-1}, t_k]. Тогда

$$j_k = 1 + h_k, \quad k = 1,2,\dots,n,$$

а индекс цен за период [t_{k-1}, t_k] равен

$$j(t_{k-1}, t_k) = j_k^{\,t_k - t_{k-1}}, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

Согласно (2.6)

$$J(t) = j_1^{\,t_1}\, j_2^{\,t_2 - t_1} \dots .\, j_n^{\,t_n - t_{n-1}}.$$

Тогда

$$J(t) = (1+h_1)^{t_1}\,(1+h_2)^{t_2 - t_1} \dots .\,(1+h_n)^{t_n - t_{n-1}}, \qquad (2.9)$$

$$1 + H(t) = (1+h_1)^{t_1}\,(1+h_2)^{t_2 - t_1} \dots .\,(1+h_n)^{t_n - t_{n-1}}. \qquad (2.10)$$

Если $h_1 = h_2 = \ldots. = h_n = h$, то

$$J(t) = (1 + h)^t \qquad (2.11)$$

$$1 + H(t) = (1 + h)^t . \qquad (2.12)$$

Здесь h - темп инфляции за 1 единицу времени на временном отрезке $[0, t]$, $J(t)$ и $H(t)$ - индекс цен и темп инфляции за за период времени $[0, t]$.

Предположим, за n единиц времени получена наращенная сумма вклада S_n. Индекс цен за период $[0, n]$ вырос до значения $J(n)$. Тогда реальная сумма вклада вследствие снижения покупательной способности денег составит

$$P(n) = \frac{S_n}{J(n)}.$$

Индекс цен $J(n)$ рассчитывается по одной из приведенных выше формул в зависимости от исходных данных. Так как $J(n) > 1$, то $P(n) < S_n$, что означает фактическое снижение ставки наращения.

Пример 2.2. Ожидаемый годовой темп инфляции первых двух лет вклада составляет 3%, а следующих трех - 4%. Какую минимальную годовую ставку сложных процентов должен предложить банк клиенту, чтобы реальная годовая доходность вклада была не меньше 8% ?

Здесь $t = 0$ - момент размещения вклада, 1 год - единица измерения времени, срок вклада $n = 5$ лет. $h_1 = 0{,}03$ и $h_2 = 0{,}04$ – среднегодовые темпы инфляции на временных отрезках [0,2], [2,5]. Для доходности по вкладу $\bar{r}$ должно быть выполнено условие: $\bar{r} \geq 0{,}8$. Пусть i - годовая сложная процентная ставка, под которую размещена сумма P_0. Тогда наращенная сумма вклада через n лет $S_n = P_0(1 + i)^n$. С учетом инфляции реальная сумма вклада составит $P(n) = \frac{S_n}{J(n)}$, где индекс цен согласно (2.9) равен $J(n) = (1 + h_1)^2(1 + h_2)^3$.

Уравнение доходности имеет вид: $P(n) = P_0 (1 + \bar{r})^n$. Разрешая это уравнение относительно $\bar{r}$ и учитывая требуемое условие для доходности, получим:

$$\bar{r} = \frac{1+i}{(1+h_1)^{\frac{2}{5}}(1+h_2)^{\frac{3}{5}}} - 1 \geq 0{,}08\,.$$

Отсюда $i \geq 0{,}11887$. Значит, минимальная процентная ставка размещения вклада составляет 0,11887 против 0,08 без учета инфляции.

1.3. Эквивалентные серии платежей.

Рассмотрим моменты времени t_1 и t_2, где t_2 не обязательно больше чем t_1. Пусть сумма C подлежит выплате в момент времени t_2. Ценность (или стоимость) этой суммы в момент t_1 определяется как:

а) результат дисконтирования суммы C к моменту t_1 в течение времени $(t_2 - t_1)$, если $t_2 > t_1$;

б) результат наращения суммы C к моменту t_1 в течение времени $(t_1 - t_2)$ если $t_1 > t_2$.

Для наращения и дисконтирования применяется принятая процентная ставка. Операции наращения и дисконтирования, которые при этом используются, называют **приведением денежной суммы к данному моменту времени**. Таким образом, ценность (стоимость) платежа в момент t - это его приведенная величина к моменту t.

На основе сформулированного утверждения определяется эквивалентность денежных сумм во времени.

Определение. Денежные суммы C_{t_1} в момент t_1 и C_{t_2} в момент t_2 называются эквивалентными по принятой процентной ставке, если одна из них является результатом наращения или дисконтирования другой по данной процентной ставке в течение времени $|t_2 - t_1|$.

Из этого определения следует, что все формулы наращения и дисконтирования, полученные в предыдущих разделах, связывают эквивалентные во времени денежные суммы по соответствующим процентным ставкам.

Обычно участники сделки исходят из того, что имеет место транзитивное свойство эквивалентности денежных сумм во времени: если сумма C_{t_1} в момент t_1 эквивалентна по заданной процентной ставке сумме C_{t_2} в момент t_2, а сумма C_{t_2} эквивалентна сумме C_{t_3} в момент t_3 по той же процентной ставке, то сумма C_{t_1} в момент t_1 эквивалентна по данной процентной ставке сумме C_{t_3} в момент t_3.

Свойством транзитивности обладают денежные суммы, если они эквивалентны по сложной процентной ставке. Для денежных сумм, эквивалентных по простой процентной ставке, этого утверждать нельзя. Покажем это. Пусть $t_1 < t_2 < t_3$.

Если C_{t_1} эквивалентна C_{t_2} по сложной процентной ставке i, то $C_{t_2} = C_{t_1}(1+i)^{t_2-t_1}$.

Если C_{t_2} эквивалентна C_{t_3} по сложной процентной ставке i, то $C_{t_3} = C_{t_2}(1+i)^{t_3-t_2}$.

Отсюда $C_{t_3} = C_{t_1}(1+i)^{t_3-t_1}$, из чего следует эквивалентность сумм C_{t_1} и C_{t_3} по данной процентной ставке.

Если i - простая, то из того, что $C_{t_2} = C_{t_1}\left(1+i(t_2-t_1)\right)$ и $C_{t_3} = C_{t_2}\left(1+i(t_3-t_2)\right)$ не следует равенство $C_{t_3} = C_{t_1}\left(1+i(t_3-t_1)\right)$.

Таким образом, транзитивное свойство эквивалентности денежных сумм не имеет места для простых процентных ставок, в связи с чем понятие эквивалентности сумм для этих ставок применяется реже.

Можно показать, что если суммы эквивалентны по сложной процентной ставке, то равны их приведенные стоимости к любому моменту времени, в частности, равны их современные стоимости.

Действительно, если, например $C_{t_2} = C_{t_1}(1+i)^{t_2-t_1}$, то $\frac{C_{t_1}}{(1+i)^{t_1}} = \frac{C_{t_2}}{(1+i)^{t_2}}$ и $C_{t_1}(1+i)^{t-t_1} = C_{t_2}(1+i)^{t-t_2}$ для любого t.

Чтобы установить эквивалентность сумм C_{t_1} в момент t_1 и C_{t_2} в момент t_2 по заданной процентной ставке, достаточно эти суммы привести к одному моменту времени или проверить для них определение эквивалентности денежных сумм. Если суммы не эквивалентны, более предпочтительной из них является та, современная ценность которой больше.

Пример 3.1. По первому обязательству сумма погашаемого долга 500 д.е. через 4 месяца. По второму – 550 д.е. через 10 месяцев. Можно ли считать обязательства эквивалентными, если используется сложная годовая процентная ставка 8%? Если нет, то какое из них является более выгодным?

Результат наращения суммы 500 д.е. в течение 6 месяцев по ставке 0,08 составляет $500 \cdot 1{,}08^{0{,}5} = 519{,}62 \neq 550$. Следовательно, обязательства не эквивалентны. Чтобы выяснить, какое из них является более выгодным, найдем современные стоимости этих обязательств:

$$\frac{500}{1{,}08^{\frac{1}{3}}} = 487{,}34 \quad \text{и} \quad \frac{550}{1{,}08^{\frac{5}{6}}} = 515{,}83.$$

Значит, второе обязательство является более выгодным.

Перейдем к определению эквивалентности серий платежей. В общем случае серия платежей может состоять из одного платежа.

Определение. Серия платежей $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ в моменты t_1, $t_2, \ldots,$ t_n эквивалентна по принятой процентной ставке серии платежей $b_{\tau_1}, b_{\tau_2}, ..., b_{\tau_m}$ в моменты τ_1, $\tau_2, ...,$ τ_m, если сумма платежей одной серии, приведенных по принятой процентной ставке к одному моменту времени, равна сумме платежей другой серии, приведенных к тому же моменту времени по той же процентной ставке.

Равенство, составленное в соответствии с данным определением, называется **уравнением эквивалентности**. Другое название уравнения эквивалентности - **уравнение ценности**, поскольку оно выражает равенство стоимостей (ценностей) обеих серий платежей в заданный момент времени.

Для приведения платежей может быть выбран любой момент времени. Однако более естественным является выбор настоящего момента времени, когда сведения о процентных ставках на различные сроки являются наиболее достоверными, а денежные суммы реальными. Если серии платежей, указанные в определении, эквивалентны по сложной процентной ставке i, а для приведения выбран настоящий момент времени $t = 0$, то уравнение эквивалентности имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{t_i}}{(1+i)^{t_k}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{b_{\tau_j}}{(1+i)^{\tau_j}}. \qquad (3.1)$$

Если одна серия платежей - расходы, а другая - доходы, то уравнение эквивалентности (3.1) выражает то, что при данной процентной ставке серия расходов в момент $t = 0$ имеет ту же ценность, что и серия доходов.

Если обе серии платежей - выплаты денежных сумм, например в счет погашения одного и того же долга, и серии эквивалентны, то одна серия платежей может заменить другую. В этом случае говорят о безубыточном изменении условий контракта. Приведенное выше определение эквивалентности серий платежей, также как и уравнение эквивалентности, выражают принцип финансовой эквивалентности, в соответствии с которым производится замена одного (старого) финансового обязательства $a_{t_1}, a_{t_2}, ..., a_{t_n}$ на другое (новое) $b_{\tau_1}, b_{\tau_2}, ..., b_{\tau_m}$. Если серии эквивалентны по принятой участниками сделки процентной ставке, то обязательства финансово эквивалентны и одно обязательство можно заменить другим без ущерба для сторон.

Один из распространенных случаев изменений контракта - консолидация (объединение) платежей. Платежи $a_{t_1}, a_{t_2}, \dots, a_{t_n}$ в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$ заменяются одним платежом b_{t_0} в момент t_0. При заданной процентной ставке возможна одна из двух задач:

1) Задан момент t_0. Требуется найти сумму консолидированного платежа b_{t_0}. Для решения задачи уравнение эквивалентности составляется относительно момента t_0.

2) Задана сумма b_{t_0}. Требуется найти срок консолидированного платежа t_0.

Уравнение эквивалентности составляется относительно момента $t = 0$ и выражает равенство современных стоимостей старого и нового обязательств.

Пример 3.2. Существующее обязательство о выплате через 5 лет первоначального долга 90000 д.е. с начисленными на него сложными процентами по годовой ставке 0,08 пересмотрено. По новому обязательству первая выплата размером в 30000 д.е. будет произведена через 2 года, а оставшаяся сумма будет выплачена через 4 года после этой даты. Предполагая, что вычисления делаются на основе исходной процентной ставки, найти величину второго платежа в новом обязательстве.

Обозначим через X сумму второго платежа в пересмотренном обязательстве. Если 90000 д.е. рассматривать как серию расходов кредитора, а 30000 д.е. и X д.е. - серию доходов, то уравнение эквивалентности, составленное относительно момента выдачи долга $t = 0$, имеет вид

$$90000 = \frac{30000}{1{,}08^2} + \frac{X}{1{,}08^6}.$$

Отсюда X = 102004,02. Таким образом, сумма 90000, предоставленная в долг в момент $t = 0$ при заданной процентной ставке эквивалентна серии из двух погасительных платежей: 30000 д.е. через 2 года и 102004,02 д.е. через 6 лет.

Этот же результат будет получен, если для составления уравнения эквивалентности использовать принцип финансовой эквивалентности обязательств по погашению долга. По старому обязательству сумма погашаемого долга $90000 \cdot 1{,}08^5$ через 5 лет. Составим уравнение эквивалентности, приведя все суммы по старому и новому обязательствам на момент поступления искомого платежа $t = 6$:

$$(90000 \cdot 1{,}08^5) \cdot 1{,}08 = 30000 \cdot 1{,}08^4 + X .$$

Находим X = 102004,02.

Пример 3.3. Платежи 1000 д.е., 2000 д.е. и 3000 д.е., которые должны выплачиваться соответственно через 60, 90 и 120 дней после некоторой даты, решено заменить на один платеж величиной 6500 д.е. Определить срок выплаты консолидированного платежа при годовой интенсивности процентов 0,1.

Здесь a_{t_1} = 1000, a_{t_2} = 2000, a_{t_3} = 3000 - заменяемые платежи в моменты $t_1 = \frac{60}{365}$, $t_2 = \frac{90}{365}$, $t_3 = \frac{120}{365}$. b_{t_0} = 6500 - сумма платежа по новому обязательству, δ = 0,1 - постоянная годовая сила роста, t_0 – искомый срок .

Примем за момент $t = 0$ дату, от которой отсчитаны все сроки. Уравнение эквивалентности, составленное относительно момента $t = 0$, имеет вид

$$1000e^{-t_1\delta} + 2000e^{-t_2\delta} + 3000e^{-t_3\delta} = 6500e^{-t_0\delta}.$$

Разрешая это уравнение относительно t_0, находим

$$t_0 = \frac{1}{\delta}\ln\frac{6500}{a_0},$$

где $a_0 = 1000e^{-t_1\delta} + 2000e^{-t_2\delta} + 3000e^{-t_3\delta}$ - сумма современных стоимостей платежей по старому обязательству. Очевидно, что сделка имеет смысл, если a_0 < 6500. Подставляя значения для t_1 , t_2 , t_3, δ в полученные выражения, находим

a_0 = 5837,957 (д.е.). Срок платежа по новому обязательству равен t_0 = 1,074 (года).

Проверим этот ответ. Выражение $a_0 = 1000e^{-t_1\delta} + 2000e^{-t_2\delta} + 3000e^{-t_3\delta}$ можно рассматривать как уравнение эквивалентности относительно момента t = 0 для одного заменяющего платежа размером a_0 в момент t = 0. Этот платеж по ставке δ эквивалентен серии из трех платежей a_{t_1}, a_{t_2}, a_{t_3}. В свою очередь, согласно условию, серия платежей a_{t_1}, a_{t_2}, a_{t_3} по принятой ставке δ эквивалентна сумме 6500 д.е. в момент t_0. Тогда по транзитивному свойству эквивалентности сумма a_0 в момент t = 0 по ставке δ эквивалентна сумме 6500 д.е. в момент t_0. Следовательно, сумма 6500 - это результат наращения суммы a_0 по ставке δ в течение срока t_0, т.е. $a_0 e^{t_0\delta} = 6500$. Проверим это равенство для найденных значений a_0 и t_0. Получаем: $5837{,}957\, e^{1{,}074 \cdot 0{,}1}$ = 6500. Следовательно, срок консолидированного платежа равен t_0 = 1,074 (года), или 1 год и 15 дней.

1.4. Потоки платежей. Основные характеристики потока платежей.

Определение. Поток платежей - это распределенная во времени последовательность платежей.

Сумма отдельного платежа называется **членом потока.** Платеж со знаком “+” означает поступление денег, платеж со знаком “ – “ - расход денег.

Процентная ставка потока платежей - сложная процентная ставка, используемая для наращения и дисконтирования членов потока.

Поток платежей называется **конечным**, если число платежей в нем конечно, и **бесконечным**, если срок действия потока неограничен.

Потоки платежей могут быть как регулярными, так и нерегулярными. Члены **регулярного** потока поступают через одинаковые промежутки времени, имеют одно и то же назначение (одинаковый знак) и изменяются во времени в соответствии с некоторым временным законом. Регулярные финансовые потоки называют также финансовыми рентами. Члены **нерегулярного** потока могут быть как положительными, так и отрицательными, временные интервалы между членами потока неодинаковы, а размеры платежей не подчиняются какому-либо временному закону.

Рассмотрим конечный поток платежей R_1, $R_2,\ldots,R_n$, члены которого - платежи, поступающие соответственно в моменты t_1 , $t_2,\ldots, t_n$, где $0 \le t_1 < t_2 <\ldots< t_n \le T$. Момент времени $t = 0$, от которого отсчитаны сроки поступления платежей, называют началом потока, T - срок действия потока. Будем считать, что процентная ставка потока задана и соответствует единице измерения сроков платежей.

Определение. Стоимость потока платежей $P(t)$ в момент $t \in [0,T]$ - это сумма всех членов потока, приведенных к моменту времени t.

Это определение следует непосредственно из определения ценности отдельного платежа в данный момент времени (параграф 1.3).

Пусть $t \in [0,T]$ - произвольный момент времени, причем $t \in [t_m, t_{m+1}]$, где t_1 , $t_2,.., t_m, t_{m+1},.., t_n$ - моменты поступления платежей $R_1, R_2,.., R_m, R_{m+1},.., R_n$. Согласно определению, стоимость потока в момент t есть:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} R_k F(t_k, t) + \sum_{k=m+1}^{n} R_k v(t, t_k) . \qquad (4.1)$$

Здесь $F(t_k, t)$ - множитель наращения k - го платежа на временном отрезке $[t_k, t]$ ($t > t_k$, где $k = 1, 2, \ldots, m$) по процентной ставке потока, $v(t, t_k)$ - дисконтный множитель k - го платежа на отрезке $[t, t_k]$ ($t < t_k$, $k = m + 1,\ldots, n$) по процентной ставке потока. Вид множителя наращения и дисконтного множителя определяется процентной ставкой потока (см. параграф 1.1).

Определение. Современная стоимость потока платежей A - это сумма всех членов потока, приведенных к моменту $t = 0$.

Согласно определению,

$$A = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k) , \qquad (4.2)$$

где $v(t_k)$ - дисконтный множитель k - го платежа на отрезке $[0, t_k]$ по процентной ставке потока. Вид дисконтного множителя определяется процентной ставкой потока (см. параграф 1.1). Выражение (4.2) - это уравнение эквивалентности относительно момента $t = 0$ для двух серий платежей: суммы A в момент $t = 0$ и $R_1, R_2,\ldots, R_n$ в моменты $t_1, t_2,\ldots, t_n$. Отсюда следует, что сумма A в момент $t = 0$ по процентной ставке потока эквивалентна всей совокупности платежей этого потока.

Определение. Наращенная сумма потока платежей S - это сумма всех членов потока с начисленными на них процентами к концу срока потока T.

Согласно определению,

$$S = \sum_{k=1}^{n} R_k F(t_k, T), \tag{4.3}$$

где $F(t_k, T)$ - множитель наращения k - го платежа на отрезке $[t_k, T]$ по процентной ставке потока. Вид множителя наращения определяется процентной ставкой потока (см. параграф 1.1). Выражение (4.3) - это уравнение эквивалентности относительно момента $t = T$ для двух серий платежей: суммы S в момент $t = T$ и $R_1, R_2,\ldots,R_n$ в моменты $t_1, t_2,\ldots, t_n$. Отсюда следует, что сумма S в момент $t = T$ по процентной ставке потока эквивалентна всей совокупности платежей этого потока.

Полагая в (4.1) $t = 0$, получим $P(0) = A$. Если в (4.1) $t = T$, то $P(T) = S$. Таким образом, **при заданной ставке потока** стоимость потока платежей в момент t = 0 - это современная стоимость потока, а стоимость потока в момент его окончания T - это наращенная сумма потока.

Пусть $t \in [0,T]$ - произвольный момент времени. Стоимость потока в момент t можно представить в виде:

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k) F(t), \tag{4.4}$$

где $R_k v(t_k)F(t)$ - приведенная к моменту t величина k - го платежа, $F(t)$ - множитель наращения на временном отрезке $[0, t]$. Выражение (4.4) можно переписать в виде:

$$P(t) = A\,F(t)\,, \qquad (4.5)$$

где $t \in [0,T]$. Согласно (4.5), стоимость потока платежей $P(t)$ в момент t - это результат наращения его современной стоимости A к моменту t по процентной ставке потока. Из (4.5) при $t = T$ получаем связь между наращенной суммой S и современной стоимостью A потока платежей:

$$S = A\,F(T\,). \qquad (4.6)$$

Формулы (4.1) - (4.6) можно прокомментировать следующим образом. Чтобы получить сумму S через время T можно поступить двумя способами: разместить сумму A на время T под заданную процентную ставку на банковский счет или вносить платежи $R_1, R_2,\ldots,R_n$ в моменты t_1 , $t_2,\ldots, t_n$ для начисления на них процентов по этой же процентной ставке до окончания срока T.

Соотношения (4.1) - (4.6) для стоимости потока в различные моменты времени являются основными и используются при решении практических задач.

Пример 4.1. Предприниматель должен выплатить денежные суммы: 1000 д.е. 1 января 2001 года, 5000 д.е. 1 июля 2003 года и 10000 д.е. 1 января 2005 года. Кредит выдан под 20% годовых, начисляемых сложными процентами 1 раз в год. Найти стоимость этих платежей на 1 января 2000 года и на 1 июня 2002 года.

Пусть время измеряется в годах, начиная с 1 января 2000 года. Стоимость долгов в этот день согласно формуле (4.2) есть:

$$A = \frac{1000}{1+i} + \frac{5000}{(1+i)^{3,5}} + \frac{10000}{(1+i)^5} = 7493{,}52\,,$$

где ставка дисконтирования i = 0,2. Стоимость на 1 июня 2002 года этих же долгов согласно формуле (4.5) есть:

$$P\left(\frac{29}{12}\right) = A(1+i)^{\frac{29}{12}} = 11642{,}34.$$

Этот результат можно проверить, получив его непосредственно по определению по формуле (4.1):

$$P\left(\frac{29}{12}\right) = 1000(1+i)^{\frac{17}{12}} + \frac{5000}{(1+i)^{\frac{13}{12}}} + \frac{10000}{(1+i)^{\frac{31}{12}}} = 11642{,}34.$$

Рассмотрим поток платежей $R_1, R_2, \ldots, R_n$, члены которого - платежи, поступающие соответственно в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$, где $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T$. Пусть **известна** стоимость потока P в момент $t = 0$. P может, например, означать сумму инвестиций в проект, по которому ожидаются доходы $R_1, R_2, \ldots, R_n$ в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$. При этом проект не является заведомо убыточным, если $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$.

Определение. Доходность потока платежей за единицу времени - это ставка сложных процентов r, по которой современная стоимость потока платежей равна P:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}. \qquad (4.7)$$

Если сроки поступления платежей $t_1, t_2, \ldots, t_n$ измеряются в годах, то r - годовая доходность. Доходность потока платежей - это не процентная ставка потока. r зависит только от величины и моментов самих платежей. Поэтому ее называют **внутренней доходностью** потока платежей. Уравнение (4.7), вообще говоря, может не иметь корней. В связи с этим докажем следующую теорему.

Теорема 4.1.

Если все члены потока платежей $R_1, R_2, \ldots, R_n$ положительны и выполняется условие $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$, то уравнение (4.7) имеет единственный положительный корень.

Доказательство. Очевидно, что корень уравнения (4.7) - это решение уравнения $F(r) = 0$, где $F(r) = P - \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}}$. Функция $F(r)$ непрерывна и дифференцируема на множестве $[0,\infty[$. Так как $F^{/}(r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k R_k}{(1+r)^{t_k+1}} > 0$, $F^{//}(r) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k(t_k+1)R_k}{(1+r)^{t_k+2}} < 0$, то $F(r)$ является возрастающей вогнутой функцией на множестве $[0, \infty[$. Кроме того, $F(0) = P - \sum_{k=1}^{n} R_k < 0$ и $\lim_{r\to\infty} F(r) = P > 0$. Отсюда следует, что существует единственная точка $r^* \in [0, \infty[$ такая, что $F(r^*) = 0$. Теорема доказана.

Корень уравнения $F(r) = 0$ является доходностью денежного потока $R_1, R_2, \ldots, R_n$, стоимость которого в момент $t = 0$ равна P. Для нахождения корня уравнения $F(r) = 0$ применяют приближенные методы. Рассмотрим **метод линейной интерполяции.**

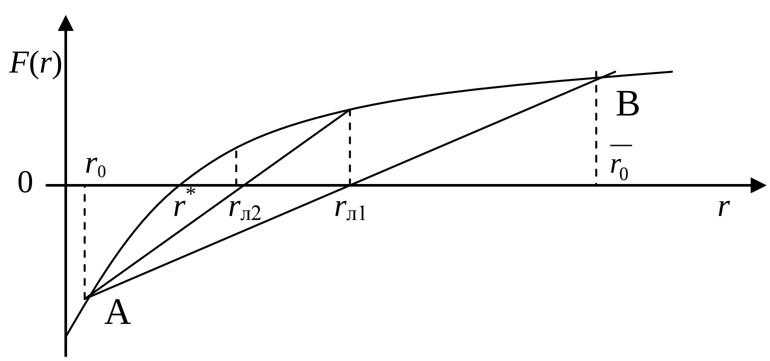


Рис. 1.4.1

Пусть отрезок $[r_0, \bar{r}_0]$ таков, что $F(r_0) < 0,\ F(\bar{r}_0) > 0$. Тогда $r* \in [r_0, \bar{r}_0]$. На отрезке $[r_0, \bar{r}_0]$ график функции $F(r)$ заменим линейным участком - проведем хорду AB, $A(r_0, F(r_0)), B(\bar{r}_0, F(\bar{r}_0))$. $(r_{л1}, 0)$ - точка пересечения хорды AB с осью Or. $r_{л1} \in [r_0, \bar{r}_0]$ и является приближенным значением r^*. Величина $r_{л1}$ рассчитывается по формуле

$$r_{л1} = r_0 + \frac{-F(r_0)}{F(\bar{r}_0) - F(r_0)}(\bar{r}_0 - r_0). \qquad (4.8)$$

Процедуру можно повторить до достижения требуемой точности. Так как $F(r)$ является вогнутой и возрастающей, то всегда линейное приближение $r_л > r^*$ и $F(r_л) > F(r^*) = 0$. Поэтому на следующем шаге можно взять отрезок $\left[r_1, \bar{r}_1\right]$, где $r_1 = r_0, \bar{r}_1 =$ $r_{л1}$. Тогда $\left[r_1, \bar{r}_1\right] \subset \left[r_0, \bar{r}_0\right]$, $F(r_1) = F(r_0) < 0,$ $F(\bar{r}_1)$ $= F(r_{л1}) > 0$ и $r* \in \left[r_1, \bar{r}_1\right]$. Если на втором шаге получено приближенное значение $r_{л2}$, то $r_{л1} > r_{л2} > r^*$ и $F(r_{л1}) > F(r_{л2}) > F(r^*) = 0$. Получаем последовательность приближенных значений $r_{л1}$, $r_{л2}$,… $\to$ r^*, для которой соответствующая последовательность значений функции $F(r_{л1})$, $F(r_{л2})$,… $\to F(r^*) = 0$ - является убывающей и сходящейся к нулю, так как $F(r)$ непрерывна.

Замечание. Рассмотреть самостоятельно метод линейной интерполяции для убывающей выпуклой функции.

Пример 4.2. Отдача от 400000 д.е., инвестированных в проект, составляет в первый год 30000 д.е., затем через полгода – 70000 д.е., еще через год 150000 д.е., затем через 1,5 года – 200000 д.е. Определить доходность инвестиции.

Условие $P < \sum_{k=1}^{n} R_k$ для данного проекта выполнено, проект не является заведомо убыточным (400000 < 30000 + 70000 + 150000 + 200000 = 450000). Пусть 1 год - единица измерения времени. Функция $F(r)$ имеет вид:

$$F(r) = 400\,000 - \frac{30000}{1+r} - \frac{70000}{(1+r)^{1,5}} - \frac{150000}{(1+r)^{2,5}} - \frac{200000}{(1+r)^4}.$$

Согласно доказанной теореме, существует единственный положительный корень уравнения $F(r) = 0$. Так как $F(0{,}04) = -1797{,}908 < 0$, $F(0{,}05) = = 9052{,}552 > 0$, то доходность заключена между 4% и 5% годовых. По формуле (4.8) находим

$$r_л = 0{,}04 + \frac{-(-1797{,}908)}{9052{,}552 - (-1797{,}908)}(0{,}05 - 0{,}04) = 0{,}041657,$$

или 4,1657 % годовых. Если требуется найти доходность с большей степенью точности, надо выполнить еще один шаг согласно изложенному методу. С точностью до четвертого знака после запятой доходность составляет 4,1629 % годовых.

Определения основных характеристик потока платежей справедливы не только для дискретных, но и для непрерывных потоков платежей. Понятие непрерывно выплачиваемого потока платежей хотя и является теоретическим, во многих случаях позволяет упростить расчеты (например, в анализе инвестиций). Предположим, что в течение времени $[0,T]$ непрерывно выплачиваются деньги с интенсивностью выплат в единицу времени $f(t)$ в момент t. Тогда современная стоимость и наращенная сумма такого потока платежей определяются по формулам:

$$A = \int_0^T f(t)v(t)dt, \quad (4.9) \qquad \text{и} \qquad S = \int_0^T f(t)F(t,T)dt, \quad (4.10)$$

где $v(t)$ - дисконтный множитель на отрезке $[0, t]$, $F(t,T)$ - множитель наращения на отрезке $[t, T]$.

Пример 4.3. На непрерывно и равномерно поступающие в течение 20 лет платежи с постоянной интенсивностью 100 д.е. в год непрерывно начисляются проценты по силе роста, изменяющейся по закону

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}03, & 0 \le t < 5 \\ 0{,}05, & 5 \le t < 12 \\ 0{,}07, & t \ge 12 \end{cases}.$$

Найти современную стоимость такого потока платежей.

Найдем дисконтный множитель $v(t)$. По формуле (1.60) $v(t) = e^{-\int_0^t \delta(y)dy}$. Тогда

$$
v(t)=\begin{cases}
\exp\left(-\int\limits_0^t 0{,}03dy\right), & 0\le t<5\\
\exp\left(-\int\limits_0^5 0{,}03dy-\int\limits_5^t 0{,}05dy\right), & 5\le t<12\\
\exp\left(-\int\limits_0^5 0{,}03dy-\int\limits_5^{12} 0{,}05dy-\int\limits_{12}^t 0{,}07dy\right), & t\ge 12
\end{cases}.
$$

Отсюда

$$
v(t)=\begin{cases}
\exp(-0{,}03t), & 0\le t<5\\
\exp(0{,}1-0{,}05t), & 5\le t<12\\
\exp(0{,}34-0{,}07t), & t\ge 12
\end{cases}.
$$

Согласно формуле (4.9), современная стоимость потока платежей равна

$$
A=100\int\limits_0^{20} v(t)dt=100\left[\int\limits_0^5 \exp(-0{,}03t)dt+\int\limits_5^{12}\exp(0{,}1-0{,}05t)dt+\int\limits_{12}^{20}\exp(0{,}34-0{,}07t)dt\right]=
$$

$$
=100\left[\frac{1}{0{,}03}(1-\exp(-0{,}15))+\frac{\exp 0{,}1}{0{,}05}(\exp(-0{,}25)-\exp(-0{,}6))+\frac{\exp 0{,}34}{0{,}07}(\exp(-0{,}84)-\exp(-1{,}4))\right]=
$$

$$
=1344{,}197.
$$

Замечание. Найти самостоятельно современную стоимость такого потока для 10 и 15 лет поступления платежей.

До сих пор предполагалось, что все платежи, дискретные или непрерывные, положительны. Если имеется серия поступающих платежей a_1, a_2 ,…, a_n в моменты t_1 , t_2,…, t_n и серия расходов b_1, b_2 ,…, b_n в те же моменты времени, то член потока R_k можно представить в виде разности $R_k = a_k - b_k$, $k = 1,2,…, n$, так как положительный платеж соответствует поступлению денег, отрицательный - их расходу (в большинстве случаев только одна из сумм a_k и b_k будет ненулевой). Тогда R_1, R_2,…,R_n - это **чистый денежный поток**. Этот поток охватывает два встречных потока - расходов и поступлений. Доходность за единицу времени такого потока определяется как ставка сложных процентов r, по которой современная стоимость потока расходов равна современной стоимости потока доходов:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+r)^{t_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^{t_k}}.$$

Это уравнение можно переписать в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} = 0. \qquad (4.11)$$

Выражение (4.11) называется **уравнением доходности** денежного потока.

Применительно к непрерывным потокам платежей, если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - интенсивности расходов и получения денег в момент t соответственно, то **чистую интенсивность** $f(t)$ такого потока в момент t можно представить в виде разности $f(t) = f_2(t) - f_1(t)$. Для непрерывного денежного потока, поступающего в течение времени $[0,T]$, уравнение доходности имеет вид:

$$\int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t} dt = 0. \qquad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) получаем уравнение доходности для непрерывно-дискретного потока платежей:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t} dt = 0. \qquad (4.13)$$

Решение этого уравнения, если оно существует, является доходностью за единицу времени такого потока. Имеется важный класс сделок, для которых уравнение доходности имеет единственное положительное решение. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.

Если все отрицательные платежи предшествуют всем положительным (или наоборот) и выполняется условие $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$ (или $\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)\,dt > 0$ для непрерывно-дискретного потока платежей), то уравнение доходности имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Докажем теорему для дискретного потока платежей. Тогда уравнение доходности имеет вид (4.11). Пусть для определенности $R_1 < 0$, $R_2 < 0, \ldots, R_m < 0$ и $R_{m+1} > 0$, $R_{m+2} > 0, \ldots, R_n > 0$. Уравнение (4.11) можно записать в виде:

$$F(r) = \sum_{k=1}^{m} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k}} = 0.$$

Домножим это уравнение на $(1+r)^{t_m}$. Получим

$$F(r)(1+r)^{t_m} = \sum_{k=1}^{m} R_k (1+r)^{t_m - t_k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k - t_m}} = 0.$$

$\sum_{k=1}^{m} R_k (1+r)^{t_m - t_k}$ - это приведенная к моменту t_m стоимость расходов, $\sum_{k=m+1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k - t_m}}$ - приведенная к моменту t_m стоимость доходов. Составим функцию

$$g(r) = \sum_{k=1}^{m} R_k (1+r)^{t_m - t_k} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^{t_k - t_m}}.$$

Тогда $F(r)(1+r)^{t_m} = g(r) = 0$. Очевидно, что корень уравнения $g(r) = 0$ является решением уравнения доходности $F(r) = 0$. Так как $g'(r) < 0$ при $r \geq 0$, то функция $g(r)$ является убывающей на множестве $[0, \infty[$. Кроме того, $g(0) = \sum_{k=1}^{n} R_k > 0$, $\lim_{r \to \infty} g(r) = -\infty$. Следовательно, уравнение $g(r) = 0$ имеет единственное положительное решение. Теорема доказана. Для непрерывного потока платежей доказательство аналогично.

Пример 4.4. В обмен на инвестиции в начале 1997, 1998 и 1999 годов в размере 1000 д.е., 2000 д.е. и 3000 д.е. соответственно инвестор ожидает получить доход в виде единичного платежа в размере 1500 д.е. в начале 2001 года и потока непрерывно и равномерно поступающих платежей с интенсивностью 1000 д.е. в год в течение 10 лет, начиная с 2003 года. Найти доходность инвестиций.

Так как $\sum_{k=1}^{n} R_k + \int_0^{10} 1000\,dt = 5500 > 0$, то финансовая операция имеет смысл. Пусть время измеряется в годах, начиная с 1 января 1997 года. Уравнение доходности (4.13) имеет вид:

$$F(r) = -1000 - \frac{2000}{1+r} - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{1500}{(1+r)^4} + \int_6^{16} \frac{1000\,dt}{(1+r)^t} = 0 \ .$$

т.е. $$F(r) = -1000 - \frac{2000}{1+r} - \frac{3000}{(1+r)^2} + \frac{1500}{(1+r)^4} + \frac{1000}{\ln(1+r)}\left[\frac{1}{(1+r)^6} - \frac{1}{(1+r)^{16}}\right] = 0 \ .$$

Так как $F(0{,}08) = 74{,}136 > 0$, $F(0{,}09) = -300{,}899 < 0$, то доходность заключена между 8% и 9% годовых. Методом линейной интерполяции находим 8,1884 % с точностью до четвертого знака после запятой.

1.5. Финансовая рента. Свойства коэффициентов наращения и дисконтирования ренты.

Определение. Поток платежей, все члены которого положительны, а временные интервалы между платежами одинаковы, называется финансовой рентой.

Основные параметры ренты:

- **член ренты** - сумма отдельного платежа;
- **период ренты** - временной интервал между двумя соседними платежами;
- **срок ренты** - время от начала первого периода ренты до конца последнего;
- **процентная ставка ренты** - сложная процентная ставка, используемая для наращения и дисконтирования членов ренты;
- ***m*** - число начислений процентов в году на члены ренты;
- ***p*** - число платежей в году.

Если члены ренты выплачиваются раз в год, то рента называется **годовой**.

Если члены ренты выплачиваются p раз в году ($p > 1$), то рента называется p **- срочной**.

Если платежи поступают столь часто, что можно считать $p \to \infty$, то ренту называют **непрерывной**.

Рента называется **постоянной**, если члены ренты одинаковы и не изменяются во времени.

Рента называется **переменной**, если члены ренты изменяются во времени в соответствии с некоторым временным законом.

Если платежи производятся в конце каждого периода ренты, то рента называется **обычной** или **постнумерандо**.

Рента с платежами в начале каждого периода называется рентой **пренумерандо**.

Рассмотрим расчет современной стоимости и наращенной суммы постоянной **обычной** (постнумерандо) p - срочной ренты. Ежегодно сумма R вносится равными долями p раз в году на банковский счет в течение n лет. Тогда имеем поток из np платежей величиной $\frac{R}{p}$ каждый в моменты $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, n$. Примем за единицу измерения времени 1 год. Пусть i - годовая эффективная процентная ставка начисления сложных процентов на поступающие платежи. Согласно определению современной стоимости потока платежей (формула (4.2)), получаем

$$A = \sum_{k=1}^{np} R_k v(t_k) = \frac{R}{p} \sum_{k=1}^{np} (1+i)^{-\frac{k}{p}}.$$

Вычисляя сумму np членов геометрической прогрессии, знаменатель которой $(1+i)^{-\frac{1}{p}}$, получим:

$$A = \frac{R}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1} \qquad (5.1)$$

- современная стоимость постоянной обычной p - срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году в течение n лет. Отсюда современная стоимость годовой обычной ренты (p = 1) при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \qquad (5.2)$$

Используя соотношения эквивалентности для эффективной процентной ставки $1+i=(1+\frac{i^{(m)}}{m})^m$ и $1+i=e^{\delta}$ (параграф 1.1), получим современную стоимость обычной p - срочной ренты при начислении на члены ренты сложных процентов m раз в году по номинальной процентной ставке $i^{(m)}$ и непрерывном начислении процентов при постоянной интенсивности процентов δ в год:

$$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{-mn}}{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (5.3)$$

$$A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-e^{-n\delta}}{e^{\frac{\delta}{p}}-1}. \qquad (5.4)$$

Формулы для наращенной суммы ренты можно получить непосредственно по определению согласно формуле (4.3). Например, для постоянной обычной p - срочной ренты при начислении процентов на члены ренты 1 раз в году в течение n лет получаем:

$$S=\sum_{k=1}^{np} R_k F(t_k,T) = \frac{R}{p}\sum_{k=1}^{np}(1+i)^{(n-\frac{k}{p})} = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}. \qquad (5.5)$$

Наращенную сумму ренты можно рассчитать, используя формулу связи современной стоимости и наращенной суммы потока платежей (4.6). Например, для годовой ренты при начислении процентов 1 раз в год:

$$S = A\,F(T) = A(1+i)^n = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^n = R\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad (5.6)$$

Для других видов обычной ренты из (5.3) и (5.4), используя множители наращения $(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}$ и $e^{n\delta}$ соответственно, получим:

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn}-1}{(1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}}-1} \qquad (5.7)$$

$$S = \frac{R}{p}\cdot\frac{e^{n\delta}-1}{e^{\frac{\delta}{p}}-1} \qquad (5.8)$$

В частности, при $m = p$ (период начисления процентов равен периоду ренты) из (5.3) и (5.7) получаем

$$A = R\frac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{i^{(p)}} \qquad (5.9)$$

$$S = R\frac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{i^{(p)}} \qquad (5.10)$$

Если единицей измерения времени является 1 год, а R - это выплата за год (единицу времени), то множитель в формулах современной стоимости ренты, равный $\frac{A}{R}$, называется **коэффициентом дисконтирования ренты**. Множитель в формулах наращенной суммы ренты, равный $\frac{S}{R}$, называется **коэффициентом наращения ренты**. Из (5.1)-(5.10) можно получить коэффициенты наращения и дисконтирования всех рассмотренных видов обычной ренты. Рассмотрим некоторые соотношения между этими коэффициентами.

Согласно (5.1) и (5.5), коэффициенты дисконтирования и наращения обычной p – срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение n лет равны соответственно

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \qquad \text{и} \qquad s_{n,i}^{(p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} \ .$$

$a_{n,i}^{(p)}$ и $s_{n,i}^{(p)}$ - это соответственно современная стоимость и наращенная сумма постоянной обычной p – срочной ренты с ежегодной выплатой 1 д.е. равными долями p раз в году в размере $\frac{1}{p}$ в моменты времени $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, n$ с начислением на члены ренты процентов 1 раз в году. Следовательно, $a_{n,i}^{(p)}$ и $s_{n,i}^{(p)}$ связаны соотношением (4.6):

$$s_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{n} a_{n,i}^{(p)} \ .$$

Аналогичный смысл имеют коэффициенты дисконтирования и наращения других рассмотренных видов обычной ренты. Для этих рент имеем соотношения:

$s_{n,i} = (1+i)^{n} a_{n,i}$ - годовая рента с начислением процентов 1 раз в год;

$s_{n,i^{(m)}}^{(p)} = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^{mn} a_{n,i^{(m)}}^{(p)}$ - p - срочная рента с начислением процентов m раз в год;

$s_{n,\delta}^{(p)} = e^{n\delta} a_{n,\delta}^{(p)}$ - p - срочная рента с непрерывным начислением процентов.

Коэффициенты дисконтирования и наращения годовой ренты при начислении процентов 1 раз в год

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{и} \qquad s_{n,i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{i}$$

затабулированы и приводятся в приложениях финансовой литературы. Если применяется p – срочная рента с начислением процентов p раз в год ($m = p$) по годовой номинальной ставке $i^{(p)}$, то за единицу измерения времени можно принять $\frac{1}{p}$ часть года. Тогда $\frac{R}{p}$ - выплата за единицу времени (постнумерандо), $\frac{i^{(p)}}{p}$ - процентная ставка за 1 единицу времени, срок ренты - np единиц времени.

Коэффициенты дисконтирования и наращения такой ренты равны соответственно $\frac{A}{R/p} = a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ и $\frac{S}{R/p} = s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$. Из формул (5.9), (5.10) имеем

$$a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} = \frac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{\frac{i^{(p)}}{p}}, \qquad s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} = \frac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{\frac{i^{(p)}}{p}},$$

что позволяет для этой ренты использовать те же таблицы коэффициентов. Заметим, что если единицей измерения времени является 1 год, то коэффициенты дисконтирования и наращения этой ренты определяются как $\frac{A}{R} = a^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ и $\frac{S}{R} = s^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ и рассчитываются по формулам, полученным из (5.9), (5.10):

$$a^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{1-(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{-pn}}{i^{(p)}}, \qquad s^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{(1+\frac{i^{(p)}}{p})^{pn}-1}{i^{(p)}}.$$

Тогда

$$a^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{1}{p}\, a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}} \quad \text{и} \quad s^{(p)}_{n,i^{(p)}} = \frac{1}{p}\, s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}. \quad (5.11)$$

Пример 5.1. В конце каждого месяца на сберегательный счет инвестируется 200 д.е. На поступающие платежи ежемесячно начисляют сложные проценты по годовой ставке 12 %. Какова величина вклада через 2 года? Какую сумму мог бы разместить инвестор на депозитный счет для получения такой же величины вклада через 2 года?

Взносы на сберегательный счет поступают в виде обычной p - срочной ренты с начислением процентов p раз в году в течение 2 лет. Здесь n = 2, p = 12, $i^{(p)}$ = 0,12. Если за единицу измерения времени принять 1 месяц, то $\frac{R}{p}$ = 200 д.е. - выплата за единицу времени, $\frac{i^{(p)}}{p} = \frac{0{,}12}{12}$ = 0,01 - процентная ставка за 1 единицу времени, срок ренты np = 24 единицы времени. По таблице коэффициентов наращения дискретных рент находим $s_{24,\ 0.01}$ = 26,97346485. Тогда наращенная сумма вклада через два года $S = \frac{R}{p} s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ = 200 $s_{24,\ 0.01}$ = 5394,69 (д.е.).

Сумма, которую мог бы разместить инвестор на депозитный счет для получения такой же величины вклада через 2 года - это современная стоимость ренты $A = \frac{R}{p} a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ = $200a_{24,0.01}$ = 4248,68 (д.е.), где коэффициент дисконтирования $a_{24,0.01}$ = 21,2433873 определен по таблице коэффициентов. Так как $A\left(1+\frac{i^{(p)}}{p}\right)^{np}$ = $4248{,}68(1+0{,}01)^{24}$ = 5394,69 (д.е.), то размещение суммы 4248,68 д.е. на депозитный счет для начисления на нее ежемесячно сложных процентов по годовой ставке 12 % позволит инвестору через два года получить ту же сумму вклада.

Замечание. Рассчитать коэффициенты дисконтирования $a^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ и наращения $s^{(p)}_{n,i^{(p)}}$, пользуясь приведенными формулами, и проверить соотношения (5.11). Объяснить, почему $a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ и $s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ можно найти в таблицах коэффициентов, а $a^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ и $s^{(p)}_{n,i^{(p)}}$ - нет. На что может повлиять выбор единицы измерения времени?

Рассмотрим ренту **пренумерандо**. Связь между коэффициентами дисконтирования и наращения рент **пренумерандо** и **постнумерандо** следует из их определения. Срок дисконтирования каждого платежа ренты пренумерандо уменьшается, а срок наращения увеличивается на один период ренты по сравнению с обычной рентой. По - прежнему единицей измерения времени считаем 1 год. Если $\tilde{a}^{(p)}_{n,i}$ и $\tilde{s}^{(p)}_{n,i}$ - коэффициенты дисконтирования и наращения p - срочной ренты пренумерандо (платежи поступают в начале каждого периода длиной $\frac{1}{p}$) при начислении на члены ренты процентов 1 раз в год, то справедливы соотношения:

$$\tilde{a}_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}}\, a_{n,i}^{(p)}$$

$$\tilde{s}_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}}\, s_{n,i}^{(p)}$$

$$\tilde{s}_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{n}\, \tilde{a}_{n,i}^{(p)}\,.$$

Отсюда при p = 1 получаем соотношения для годовых рент:

$$\tilde{a}_{n,i} = (1+i)\, a_{n,i}$$

$$\tilde{s}_{n,i} = (1+i)\, s_{n,i}$$

$$\tilde{s}_{n,i} = (1+i)^{n}\, \tilde{a}_{n,i}\;.$$

При непрерывном начислении процентов для p - срочной ренты имеем соотношения:

$$\tilde{a}_{n,\delta}^{(p)} = e^{\frac{1}{p}}\, a_{n,\delta}^{(p)}$$

$$\tilde{s}_{n,\delta}^{(p)} = e^{\frac{1}{p}}\, s_{n,\delta}^{(p)}$$

$$\tilde{s}_{n,\delta}^{(p)} = e^{n\delta}\, \tilde{a}_{n,\delta}^{(p)}\,.$$

Рассмотрим **непрерывную** ренту. Коэффициенты дисконтирования и наращения постоянной непрерывной ренты можно получить из формул для p - срочной ренты при $p \to \infty$ или по определению (формулы (4.9), (4.10)) для непрерывного равномерно выплачиваемого потока платежей с постоянной годовой интенсивностью $f(t)$ = 1. Например, для постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов по постоянной силе роста δ получаем:

$$\bar{a}_{n,\delta} = \lim_{p\to\infty} a_{n,\delta}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-e^{-n\delta}}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1-e^{-n\delta}}{p\left(\frac{\delta}{p}\right)} = \frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}\;,$$

где $a_{n,\delta}^{(p)}$ - коэффициент дисконтирования обычной p - срочной ренты при непрерывном начислении процентов. Заметим, что так как $\lim\limits_{p\to\infty}\tilde{a}_{n,\delta}^{(p)}=\lim\limits_{p\to\infty}e^{\frac{1}{p}}a_{n,\delta}^{(p)}=\lim\limits_{p\to\infty}a_{n,\delta}^{(p)}$, где $\tilde{a}_{n,\delta}^{(p)}$ - коэффициент дисконтирования p - срочной ренты пренумерандо при непрерывном начислении процентов, то

$$\lim_{p\to\infty}a_{n,\delta}^{(p)}=\lim_{p\to\infty}\tilde{a}_{n,\delta}^{(p)}=\bar{a}_{n,\delta}.$$

Действительно, при непрерывно поступающих платежах различие между рентами пренумерандо и постнумерандо исчезает.

Коэффициент дисконтирования постоянной непрерывной ренты при начислении процентов 1 раз в год получим по определению:

$$\bar{a}_{n,i}=\int_0^n f(t)v(t)dt=1\cdot\int_0^n(1+i)^{-t}dt=-\frac{(1+i)^{-t}}{\ln(1+i)}\Bigg|_0^n=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}.$$

Коэффициенты наращения непрерывных рент можно найти из равенств вида (4.6):

$$\bar{s}_{n,\delta}=e^{n\delta}\,\bar{a}_{n,\delta}=\frac{e^{n\delta}-1}{\delta},$$

$$\bar{s}_{n,i}=(1+i)^n\,\bar{a}_{n,i}=\frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}.$$

Соотношения между коэффициентами дисконтирования рассмотренных трех видов рент - обычной, пренумерандо и непрерывной - можно установить из следующих соображений. Так как $p\left((1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right)=i^{(p)}$, где $i^{(p)}$ - эквивалентная годовая номинальная процентная ставка, то

$$a_{n,i}^{(p)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(p)}}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\cdot\frac{i}{i^{(p)}}=a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}}.$$

С другой стороны,

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(p)}}=\frac{1-e^{-n\delta}}{\delta}\cdot\frac{\delta}{i^{(p)}}=\bar{a}_{n,\delta}\,\frac{\delta}{i^{(p)}}.$$

Следовательно

$$a_{n,i}^{(p)} = a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}} = \bar{a}_{n,\delta}\,\frac{\delta}{i^{(p)}}, \tag{5.12}$$

где $a_{n,i}$, $\bar{a}_{n,\delta}$ - коэффициенты дисконтирования обычной годовой ренты с начислением процентов 1 раз в год и постоянной непрерывной ренты при непрерывном начислении процентов. Равенства (5.12) можно продолжить для ренты пренумерандо, если учесть соотношения коэффициентов дисконтирования обеих рент:

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{\tilde{a}_{n,i}^{(p)}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{и} \quad a_{n,i} = \frac{\tilde{a}_{n,i}}{1+i} \quad .$$

Тогда

$$a_{n,i}^{(p)} = \frac{\tilde{a}_{n,i}^{(p)}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}} = a_{n,i}\,\frac{i}{i^{(p)}} = \frac{\tilde{a}_{n,i}}{(1+i)}\cdot\frac{i}{i^{(p)}} = \tilde{a}_{n,i}\,\frac{d}{i^{(p)}}. \tag{5.13}$$

где $d = \dfrac{i}{1+i}$ - эквивалентная учетная ставка. Из (5.12), (5.13) получаем

$$i\,a_{n,i} = i^{(p)}\,a_{n,i}^{(p)} = d\,\tilde{a}_{n,i} = d^{(p)}\,\tilde{a}_{n,i}^{(p)} = \delta\,\bar{a}_{n,\delta} \quad , \tag{5.14}$$

где $d^{(p)} = \dfrac{i^{(p)}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}$ - эквивалентная номинальная учетная ставка. Каждое выражение в этом равенстве - современная стоимость процентов, выплачиваемых по займу 1 д.е. на протяжении n лет в соответствии с различными способами выплаты процентов.

Аналогичные соотношения можно получить и для коэффициентов наращения рент.

Если полагают, что срок ренты $n = \infty$, то ренту называют **вечной**. Наращенная сумма вечной ренты бесконечна. Однако современную величину такой ренты можно найти. Для обычной вечной p - срочной ренты с начислением процентов 1 раз в год получаем при $n \to \infty$:

$$a_{\infty,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} a_{n,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i^{(p)}} = \frac{1}{i^{(p)}} .$$

Для такой же ренты пренумерандо

$$\tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} \tilde{a}_{n,i}^{(p)} = \lim_{n\to\infty} (1+i)^{\frac{1}{p}} a_{n,i}^{(p)} = (1+i)^{\frac{1}{p}} \lim_{n\to\infty} a_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}}{i^{(p)}} = \frac{1}{d^{(p)}} .$$

Кроме того,

$$\tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p}(1+i)^{-\frac{k}{p}} = \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p}(1+i)^{-\frac{k}{p}} = \frac{1}{p} + a_{\infty,i}^{(p)} .$$

Таким образом,

$$a_{\infty,i}^{(p)} = \frac{1}{i^{(p)}} , \qquad \tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \frac{1}{d^{(p)}} , \qquad \tilde{a}_{\infty,i}^{(p)} = \frac{1}{p} + a_{\infty,i}^{(p)} . \qquad (5.15)$$

Если вечная рента является годовой (p = 1), то имеем

$$a_{\infty,i} = \frac{1}{i} , \quad \tilde{a}_{\infty,i} = \frac{1}{d} , \quad \tilde{a}_{\infty,i} = 1 + a_{\infty,i} . \qquad (5.16)$$

Если начало ренты, т.е. начало ее первого периода, переносится в будущее на t единиц времени относительно текущего момента t = 0, то такую ренту называют **отсроченной**. Современная стоимость отсроченной ренты A_t определяется следующим образом. Согласно определению современной стоимости потока платежей,

$$A_t = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t_k) = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t,t_k) v(t) = v(t) \sum_{k=1}^{n} R_k v(t,t_k) = v(t)\, A ,$$

где $v(t_k)$, $v(t,t_k)$, $v(t)$ - дисконтные множители k - го платежа на временных отрезках [0, t_k], [t, t_k], [0, t] соответственно. Так как $A = \sum_{k=1}^{n} R_k v(t,t_k)$, то A - стоимость ренты, рассчитанная на момент начала ее первого периода, т.е. на момент начала неотсроченной ренты. Следовательно, A - это современная стоимость неотсроченной ренты. Таким образом, современная стоимость отсроченной ренты определяется путем дисконтирования по процентной ставке ренты в течение времени t современной стоимости A неотсроченной ренты:

$$A_t = v(t)\,A\,, \qquad (5.17)$$

Пример 5.2. По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн. д.е. оплачивается в рассрочку в конце каждого квартала в течение пяти лет с начислением сложных процентов раз в год по ставке 10% годовых. Найти величину отдельного взноса, если начало оплаты продукции перенесено на полгода после подписания контракта.

Если начало отсчета времени $t = 0$ – это момент подписания контракта, а единица измерения времени – 1 год, то здесь $n = 5$, $p = 4$, $i = 0{,}1$, $t = 0{,}5$. Согласно формуле (5.17), стоимость потока платежей по оплате продукции на момент подписания контракта равна $A_t = v(t)\,A = \frac{1}{(1+i)^t}A$, где A_t = 2 млн. д.е., A - современная стоимость неотсроченной обычной p - срочной ренты с начислением процентов 1 раз в году в течение n лет. Согласно (5.1), $A = \frac{R}{p}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}$. Из формул для A_t и A находим величину отдельного взноса $\frac{R}{p}$ = 133432,20 д.е. против $\frac{1}{(1+i)^t}$ 133432,20 = 127222,61 д.е., если бы начало оплаты продукции не откладывалось.

Замечание. Из определения срока ренты следует, что если $\frac{1}{p}$ $(p \ge 1)$ - период ренты, то срок ренты n (лет) является числом, кратным $\frac{1}{p}$, т.е. $n = \frac{m}{p}$, где m – целое положительное число. Известно, что всякое положительное рациональное число можно представить в виде $\frac{m}{p}$, где m, p – целые положительные числа, а всякое иррациональное число можно с любой степенью точности заменить рациональным числом $\frac{m}{p}$. Это означает, что если срок ренты n не является целым, то всегда можно (точно или с любой степенью точности) представить n в виде целого числа периодов некоторой p – срочной ренты и использовать связь коэффициентов дисконтирования и наращения рент: $a_{n,i}^{(p)} = a_{n,i}\dfrac{i}{i^{(p)}}$ и $s_{n,i}^{(p)} = s_{n,i}\dfrac{i}{i^{(p)}}$. Если $\dfrac{1}{p}$ выбирается в качестве единицы измерения времени, то используются соотношения: $a_{n,i}^{(p)} = \dfrac{1}{p}a_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$ и $s_{n,i}^{(p)} = \dfrac{1}{p}s_{np,\frac{i^{(p)}}{p}}$.

Таким образом, все полученные формулы для коэффициентов дисконтирования и наращения рент справедливы для $n \geq 0$, т.е. для всех неотрицательных значений n, не только целых.

Свойства коэффициентов наращения и дисконтирования ренты.

Рассмотрим зависимость коэффициентов дисконтирования и наращения ренты от срока ренты и процентной ставки. Поскольку характер зависимости не должен зависеть от числа платежей в году, рассмотрим годовую обычную ренту с начислением процентов 1 раз в год.

1) $i = 0$.

Имеем $a_{n,i} = \left(\dfrac{1}{1+i} + \ldots + \dfrac{1}{(1+i)^n}\right)\Bigg|_{i=0} = n$, $s_{n,i} = \left((1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) + 1\right)\Big|_{i=0} = n$.

Ситуацию можно рассматривать как беспроцентный долг, выданный в сумме n и возвращаемый равными долями в течение n лет.

2) Установим зависимость от i коэффициента наращения ренты $s_{n,i}$.

$$s_{n,i} = (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) + 1.$$

Очевидно, $s_{n,i}$ - возрастающая функция i, что следует из свойств наращенной суммы разового платежа. Действительно, так как $(s_{n,i})_i^{/} > 0$, $(s_{n,i})_{ii}^{//} > 0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} s_{n,i} = \infty$, то $s_{n,i}$ - возрастающая выпуклая функция аргумента i (рис. 1.5.1).

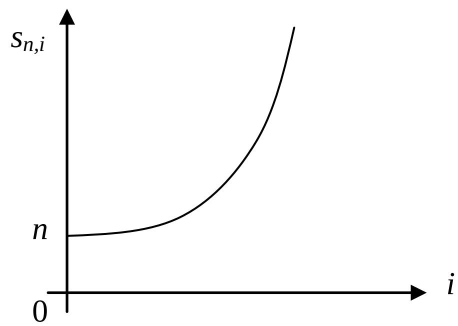


Рис. 1.5.1

3) Установим зависимость от i коэффициента дисконтирования ренты $a_{n,i}$.

$$a_{n,i} = \frac{1}{1+i} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} .$$

Очевидно, $a_{n,i}$ - убывающая функция i, что следует из свойств современной стоимости разового платежа. Действительно, так как $(a_{n,i})_i^{/} < 0,\ (a_{n,i})_{ii}^{//} > 0$ и $\lim\limits_{i \to \infty} a_{n,i} = 0$, то $a_{n,i}$ - убывающая выпуклая функция аргумента i (рис. 1.5.2).

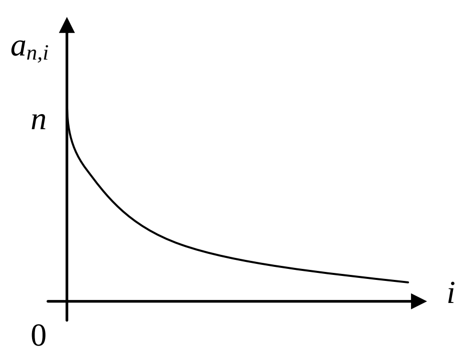


Рис. 1.5.2

4) Установим зависимость от n коэффициента наращения ренты $s_{n,i}$.

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i},\ \text{где}\ \ n \geq 0 .$$

Так как $(s_{n,i})'_n > 0$, $(s_{n,i})''_{nn} > 0$ и $\lim_{n\to\infty} s_{n,i} = \infty$, то $s_{n,i}$ - возрастающая выпуклая функция аргумента n (рис. 1.5.3).

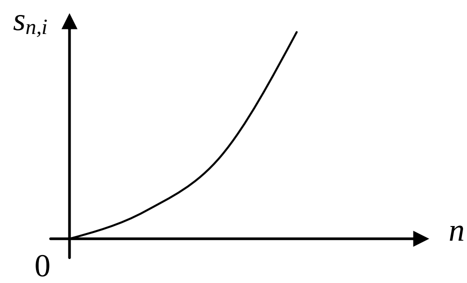


Рис. 1.5.3

5) Установим зависимость от n коэффициента дисконтирования ренты $a_{n,i}$.

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}, \text{ где } n \geq 0 .$$

Так как $(a_{n,i})'_n > 0$, $(a_{n,i})''_{nn} < 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_{n,i} = \frac{1}{i}$ (вечная рента), то $a_{n,i}$ - возрастающая вогнутая функция аргумента n (рис. 1.5.4).

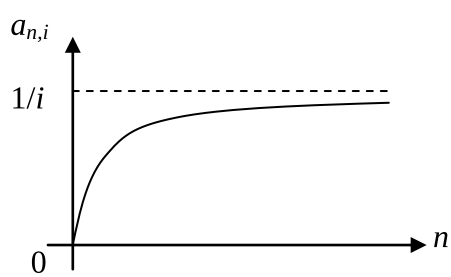


Рис. 1.5.4

Эти свойства используются в задачах на определение параметров ренты.

Определение параметров ренты.

Параметры ренты *R*, *n*, *i* рассматриваются как основные, *p* и *m* – как вспомогательные. При разработке контрактов возможны случаи, когда задается современная стоимость *A* или наращенная сумма ренты *S* и два основных параметра. Требуется найти третий.

Определение члена ренты.

Рассматриваются задачи типа: заданы *S*, *n*, *i* или *A*, *n*, *i*. Найти *R* (годовая рента). Значения годового взноса *R* находят из равенств:

$$S = R\, s_{n,i} \quad \text{и} \quad A = R\, a_{n,i}\ .$$

Определение срока ренты.

Заданы *A*, *R*, *i*. Найти *n*.

Так как $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, то $\dfrac{iA}{R} = 1-(1+i)^{-n} < 1$, если n - конечно и $\dfrac{iA}{R} = 1$ при $n \to \infty$ (вечная рента). Отсюда получаем условие разрешимости задачи о сроке ренты:

$$R > Ai\ .$$

В общем случае, когда заданы $A, \dfrac{R}{p}, \dfrac{i^{(m)}}{m}$, то условие разрешимости задачи имеет вид:

$$\frac{R}{p} > A\left((1+\frac{i^{(m)}}{m})^{\frac{m}{p}} - 1\right).$$

Заметим, что если современную стоимость ренты рассматривать как сумму, выданную в долг и погашаемую в соответствии с условиями ренты, то полученные неравенства можно рассматривать как условие возврата долга.

Если заданы *S*, *R*, *i*, то задача определения срока ренты *n* всегда разрешима.

Для нахождения *n* выражения современной стоимости и наращенной суммы разрешают относительно *n*.

Определение процентной ставки ренты.

Заданы *A*, *R*, *n*. Найти *i*.

Так как

$$A = R\left(\frac{1}{1+i}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right) < R\frac{n}{1+i} < Rn,$$

если $i > 0$, то условие разрешимости задачи имеет вид:

$$A < Rn\ .$$

Заданы *S*, *R*, *n*. Так как при $i > 0$

$$S = R((1+i)^{n-1}+\ldots+(1+i)+1) > Rn,$$

то условие разрешимости задачи в этом случае имеет вид:

$$S > Rn\ .$$

При выполнении условия разрешимости процентная ставка ренты находится на основании теорем 4.1, 4.2 (см. примеры 4.2 и 4.4) методом линейной интерполяции (или другим приближенным методом).

1.6. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Инвестиции и их виды

В соответствии с законом РФ **инвестиции** определяются как вложение денежных средств (или иных ценностей, имеющих денежную оценку) для получения доходов в будущем. Будем рассматривать только такие инвестиции, цели которых выражаются в денежной форме (максимизация дохода, состояния, прибыли и др.). Инвестиции осуществляются, как правило, для достижения долгосрочных целей, не связанных с текущим потреблением. Различают реальные и финансовые инвестиции.

Реальные инвестиции - это вложение денежных средств в материальные ресурсы: землю, недвижимость, оборудование. Производственные инвестиции -

один из видов реальных инвестиций. Это вложения в создание, реконструкцию или перепрофилирование производственного предприятия.

Финансовые инвестиции - это вложение денежных средств в финансовые инструменты. Финансовый инструмент - это ценная бумага любого вида. Ценная бумага - это документ, закрепляющий за ее держателем право на получение при определенных условиях доходов в будущем. Различают основные и производные финансовые инструменты. Основные - акции, облигации, векселя, сберегательные счета и депозиты. К производным финансовым инструментам относятся финансовые фьючерсы, опционы, варранты и др.

Как правило, реальные и финансовые инвестиции являются взаимодополняющими. Например, компании требуются средства для строительства завода. Эти реальные инвестиции можно профинансировать за счет продажи новых акций на первичном рынке ценных бумаг. В свою очередь, покупка акций представляет собой финансовые инвестиции для покупателей. В развитых экономиках финансовые инвестиции составляют большую часть всех инвестиций и играют важную роль в финансировании реальных инвестиций в экономику. В данном параграфе изучаются методы оценки эффективности производственных инвестиций.

Показатели эффективности инвестиционных проектов.

Для привлечения производственных инвестиций разрабатывается инвестиционный проект. Основная характеристика инвестиционного проекта – финансовый поток расходов и доходов. Этот поток представляет собой модель предполагаемого потока платежей по проекту и строится на основе совокупности прогнозных оценок на время реализации проекта. Инвестиционный проект, рассматриваемый в условиях определенности, описывается своим чистым денежным потоком $R_0, R_1, R_2,\ldots, R_n$ в моменты времени $t = 0, t_1, t_2,\ldots, t_n$ соответственно, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Начало проекта $t = 0$ - момент вложения исходной инвестиции в размере I, T - срок проекта. Как следует из определения чистого денежного потока (параграф 1.4), член потока $R_k = a_k - b_k$, $k = 0,1, 2,\ldots, n$, где $a_0, a_1, a_2 ,\ldots, a_n$ – доходы по проекту в моменты $t = 0, t_1, t_2,\ldots, t_n$ и расходы $b_0 = I, b_1, b_2 ,\ldots, b_n$ в те же моменты времени (в большинстве случаев только одна из сумм a_k и b_k будет ненулевой). Член денежного потока $R_0 = - b_0 = - I$, так как очевидно, что $a_0 = 0$. $R_k > 0$ означает превышение поступления над расходом в момент t_k, при обратном соотношении $R_k < 0$. Очевидно, могут быть и нулевые члены денежного потока. Если финансовый поток проекта представляет собой непрерывно-дискретный поток платежей (см. параграф 1.4), то чистый денежный поток проекта содержит чистую интенсивность $f(t) = f_2(t) - f_1(t)$, где $f_2(t)$ и $f_1(t)$ – интенсивности потоков доходов и расходов в момент t соответственно, $t \in [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, T]$. Таким образом, инвестиционный проект описывается финансовым потоком вида

$$(R_0, R_1, R_2,\ldots,R_n \text{ в моменты } t = 0, t_1, t_2,\ldots, t_n)$$

или

$$(R_0, R_1, R_2,\ldots,R_n \text{ в моменты } t = 0, t_1, t_2,\ldots, t_n;\ \ f(t),\ t \in [\tau_1,\tau_2] \subseteq [0, T]\ ),$$

где $R_k = a_k - b_k$, $k = 0,1, 2,\ldots, n$;

$$(a_0, a_1, a_2 ,\ldots, a_n \text{ в моменты } t = 0, t_1, t_2,\ldots, t_n;\ \ f_2(t),\ t \in [\tau_1,\tau_2] \subseteq [0, T]\ )$$

- поток доходов от проекта;

$$(b_0 = I, b_1, b_2 ,\ldots, b_n \text{ в моменты } t = 0, t_1, t_2,\ldots, t_n;\ \ f_1(t),\ t \in [\tau_1,\tau_2] \subseteq [0, T]\ )$$

- поток инвестиций в проект.

Например, финансовый поток проекта в примере 4.2 (параграф 1.4) имеет вид:

(-400000, 30000, 70000, 150000, 200000 в моменты

$$t = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 1{,}5,\ t_3 = 2{,}5,\ t_4 = 4),$$

а финансовый поток проекта в примере 4.4:

$$(-1000,\ -2000,\ -3000,\ 1500 \text{ в моменты}$$

$$t = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 4;\ \ f(t) = 1000,\ 6 \le t \le 16).$$

Если временные интервалы между членами денежного потока одинаковы, то период проекта - временной интервал между двумя соседними членами денежного потока. Поступления и расходы относят на конец периода. Если период проекта - год, то членам денежного потока $R_0, R_1, R_2,\ldots,R_n$ соответствуют моменты времени, измеряемые в годах, $t = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ldots,\ t_n = n$. Срок проекта $T = n$ лет. Тогда проект описывается финансовым потоком вида

$$(R_0, R_1, R_2,\ldots,R_n) \qquad (6.1)$$

или непрерывно-дискретным потоком платежей:

$$(R_0, R_1, R_2,\ldots,R_n;\ \ f(t),\ t \in [\tau_1, \tau_2] \subseteq [0, T]\ ). \qquad (6.2)$$

Проект классического характера – это проект, в котором денежный поток вида (6.1) или (6.2) меняет знак только один раз или расходы инвестора предшествуют доходам от проекта. Очевидно, что те проекты, для которых $\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)\,dt \le 0$, неприемлемы. Следует рассматривать лишь те проекты, для которых эта сумма положительна (сумма доходов по проекту превышает сумму расходов).

Для оценки эффективности инвестиционного проекта используют четыре показателя, основанные на дисконтировании членов финансового потока проекта к моменту $t = 0$:

- чистая современная стоимость проекта (*net present value, NPV*);
- внутренняя норма доходности (*internal rate of return, IRR*);
- срок окупаемости (*discounted payback period, DPP*);
- индекс доходности (*profitability index, PI*).

Каждый из показателей – это результат сопоставления современных стоимостей инвестиций в проект и отдач от инвестиций. Для дисконтирования членов финансового потока проекта применяется процентная ставка i. Необходимо, чтобы процентная ставка и сроки платежей по проекту были согласованы между собой. Существует несколько подходов для определения ставки дисконтирования. Будем считать, что i – годовая процентная ставка, по которой инвестор мог бы дать взаймы или занять деньги. Рассмотрим определения и свойства показателей эффективности проектов с классической схемой инвестирования (сначала вложения средств, затем отдача), денежный поток которых имеет вид (6.1) или (6.2). Единица измерения времени – год.

Определение. Чистая современная стоимость проекта $NPV(i)$ при процентной ставке i - это современная стоимость чистого денежного потока проекта по процентной ставке i.

$NPV(i)$ проекта с дискретным потоком платежей (6.1):

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} \quad . \qquad (6.3)$$

$NPV(i)$ проекта с непрерывно - дискретным потоком платежей (6.2):

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+i)^t}\,dt \quad . \qquad (6.4)$$

Пример 6.1. Вычислим значения показателя $NPV(i)$ для следующих проектов.

A (-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты $t = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$)

при ставке дисконтирования 5 % годовых:

$$NPV(i) = -1000 - \frac{2000}{1+i} - \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{1500}{(1+i)^4} + \int_6^{16} \frac{1000\,dt}{(1+i)^t} =$$

$$= -1000 - \frac{2000}{1+i} - \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{1500}{(1+i)^4} + \frac{1000}{\ln(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^6} - \frac{1}{(1+i)^{16}}\right] = 1513{,}16.$$

Проект B(-1000,-300,500,500,500,500) при ставке дисконтирования 5 % годовых:

$$NPV(i) = -1000 - \frac{300}{1+i} + \frac{500}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} + \frac{500}{(1+i)^5} = 402{,}8.$$

Проект C(-90,30,40,40) при ставке дисконтирования 12 % годовых:

$$NPV(i) = -90 + \frac{30}{1+i} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3} = -2{,}86.$$

Свойства и экономическое содержание *NPV*(*i*).

1) Если $NPV(i) \geq 0$, то доходы от проекта окупают вложенные инвестиции. При $NPV(i) < 0$ доходы не окупают инвестиций. Действительно, например для проекта с непрерывно - дискретным потоком платежей:

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} - \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t} . \qquad (6.5)$$

Как видим, $NPV(i)$ – это разность между современной стоимостью доходов от проекта и современной стоимостью инвестиций в этот проект. Отсюда следует, что при $NPV(i) > 0$ проект является прибыльным. При $NPV(i) < 0$ проект является убыточным. При $NPV(i) = 0$ проект ни прибыльный, ни убыточный, но, согласно [5], скорее всего будет принят. В примере 6.1 проекты A и B являются прибыльными, проект C приводит к потерям.

2) Чистая современная стоимость проекта $NPV(i)$ характеризует возможный прирост (убытки) капитала инвестора в результате реализации проекта по сравнению с альтернативными вложениями под ставку i.

Чтобы обосновать это свойство, рассмотрим величину $NFV(i)$ (*net future value*), называемую **чистой будущей стоимостью проекта**:

$$NFV(i) = NPV(i)(1+i)^T. \qquad (6.6)$$

Отсюда

$$NFV(i) = \sum_{k=0}^{n} R_k (1+i)^{n-k} + \int_0^T f(t)(1+i)^{T-t}\, dt \quad ,$$

или

$$NFV(i) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+i)^{n-k} + \int_0^T f_2(t)(1+i)^{T-t}\, dt \; - \left(\sum_{k=0}^{n} b_k (1+i)^{n-k} + \int_0^T f_1(t)(1+i)^{T-t}\, dt \right) .$$

Поясним экономический смысл полученного выражения. Предположим, что проект осуществляется за счет собственных средств инвестора, i – годовая банковская процентная ставка по срочному вкладу на T лет. Тогда первые два слагаемых можно рассматривать как результат реинвестирования к моменту T доходов от проекта. Выражение в скобках – потери инвестора при реализации инвестиционного проекта вследствие того, что он не разместил свои деньги на банковский счет, а вложил их в проект. Если $NFV(i) > 0$, то инвестору выгоднее финансировать проект, а не вкладывать деньги в банк под ставку i, а сама величина $NFV(i)$ показывает насколько выгоднее. Если $NFV(i) < 0$, то вывод противоположный, а сама величина $NFV(i)$ показывает в этом случае размер убытков инвестора в случае реализации проекта. При $NFV(i) = 0$ инвестор предпочтет тот способ вложения денег – в проект или на банковский счет – который является более надежным. Таким образом, $NFV(i)$ – это показатель конечного состояния инвестора в случае реализации проекта по сравнению с альтернативным вложением средств. Так как показатели $NFV(i)$ и $NPV(i)$ связаны соотношением (6.6), то величина $NPV(i)$ характеризует конечное состояние инвестора в результате реализации проекта следующим образом. $NPV(i) > 0$ означает, что проект является выгодным, так как позволяет получить прибыль по сравнению с альтернативным вложением инвестиций. $NPV(i) < 0$ означает, что инвестору выгоднее положить свой капитал в банк на T лет под ставку i, чем финансировать проект.

Пример 6.2. Является ли выгодным проект, по которому вложение 1 млн. д.е. приносит ежегодно доход 100 тыс. д.е. в течение 15 лет? Банковская ставка по депозитам на этот срок 5 % годовых.

Чистый денежный поток проекта имеет вид:

(-1000000,100000,…,100000 в моменты $t = 0$, $t_1 = 1$, …, $t_{15} = 15$).

Инвестиции – разовые в размере $I = 1000000$ д.е. в момент $t = 0$, поток доходов – годовая обычная рента. Современная стоимость потока доходов составляет $Ra_{n,i}$, где $R = 100000$, $n = 15$, $i = 0{,}05$. Чистая современная стоимость проекта равна

$$NPV(i) = Ra_{n,i} - I = 100000\, a_{15;\,0,05} - 1000000 = 37965{,}80 \text{ д.е.}$$

Так как $NPV(i) > 0$, то проект является выгодным. По окончании проекта прибыль инвестора по сравнению с размещением денег на депозит составит

$$NFV(i) = NPV(i)(1+i)^{15} = 78928{,}18 \text{ д.е.}$$

При этом на банковском счете инвестора будет накоплена сумма $Rs_{n,i}$ = 2157856,36 д.е. (доходы от проекта реинвестируются под ставку 5% годовых) против суммы $1000000(1 + i)^{15}$ = 2078928,18, которая была бы получена инвестором при вкладе 1000000 д.е. на депозит на 15 лет под ставку 5 %. Разность $Rs_{n,i} - 1000000(1 + i)^{15}$ составляет величину $NFV(i)$.

3) Если $NPV(i) > 0$, то $NPV(i)$ – это максимальная величина, на которую можно увеличить инвестиции в проект при данных доходах и ставке дисконтирования i так, чтобы проект не стал убыточным.

Действительно, пусть в (6.5) $NPV(i) > 0$. Если увеличить инвестиции в проект в момент $t = 0$, сохраняя все остальные параметры проекта неизменными, то величина $NPV(i)$ очевидно станет меньше. Если инвестиции в проект увеличить на величину $\Delta = NPV(i) > 0$, то чистая современная стоимость полученного проекта станет равной нулю:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t}dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} - \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t} - \Delta\ .$$

Дальнейшее увеличение инвестиций в проект сделает его убыточным, так как приведет к отрицательному значению чистой современной стоимости проекта.

Из свойств показателя $NPV(i)$ следует, что чем больше значение $NPV(i)$, тем лучше. Один из критериев выбора инвестиционного проекта – критерий максимального значения $NPV(i)$. Показатель $NPV(i)$ является абсолютным, учитывает масштабы инвестиций и позволяет рассчитать прирост (убыток) капитала инвестора по сравнению с альтернативным вложением инвестиций. На этот показатель ориентируются при стремлении максимизировать массу дохода. Показатель $NPV(i)$ часто используют как основной измеритель эффективности инвестиций. Показатель чистой будущей стоимости проекта $NFV(i)$ также используют при сравнении инвестиционных проектов. Для проектов с положительным значением $NPV(i)$ рассчитывают $NFV(i)$ на момент T, когда последний из альтернативных проектов закончится (см. пример 6.9).

Определение. Внутренняя норма доходности проекта (IRR) – это ставка дисконтирования r, при которой чистая современная стоимость проекта равна нулю:

$$NPV(r) = 0. \qquad (6.7)$$

Для проектов с непрерывно-дискретным и дискретным потоком платежей это уравнение имеет вид соответственно:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} + \int_0^T \frac{f(t)}{(1+r)^t} dt = 0 \qquad (6.8)$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k} = 0. \qquad (6.9)$$

Эти выражения совпадают с уравнениями доходности денежного потока (4.11) и (4.13) в параграфе 1.4. Поэтому решение уравнения (6.7), если оно существует, называют доходностью проекта. Существование решения устанавливается теоремой 4.2. Согласно этой теореме, уравнение (6.7) для проекта классического характера, удовлетворяющего условию $\sum_{k=0}^{n} R_k + \int_0^T f(t)\,dt > 0$ (или $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$ для проекта с дискретным потоком платежей), имеет единственное положительное решение. Это решение находят, используя приближенные методы, например метод линейной интерполяции (рассмотрен в параграфе 1.4, примеры 4.2, 4.4). Таким образом, решение уравнения (6.7) – это значение показателя *IRR* проекта. Величина *IRR* полностью определяется "внутренними" характеристиками самого проекта и не зависит, например, от ставки дисконтирования i. Расчет *IRR* часто применяют в качестве первого шага анализа инвестиций.

Пример 6.3. Значение показателя *IRR* проекта *A*(-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты $t = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$) получено в примере 4.4 (параграф 1.4):

$$r \approx 0{,}081884 \ (\approx 8{,}2\ \%\ \text{годовых}).$$

Значение показателя *IRR* проекта *B*(-1000,-300,500,500,500,500) находим из уравнения доходности:

$$-1000 - \frac{300}{1+r} + \frac{500}{(1+r)^2} + \frac{500}{(1+r)^3} + \frac{500}{(1+r)^4} + \frac{500}{(1+r)^5} = 0.$$

Методом линейной интерполяции определяем

$$r \approx 0{,}14425 \ (\approx 14{,}43\ \%\ \text{годовых}).$$

Для проекта *C*(-90,30,40,40) уравнение доходности имеет вид:

$$-90 + \frac{30}{1+r} + \frac{40}{(1+r)^2} + \frac{40}{(1+r)^3} = 0.$$

Методом линейной интерполяции находим

$$r \approx 0{,}10230 \ (\approx 10{,}23\ \%\ \text{годовых}).$$

Свойства и экономическое содержание внутренней нормы доходности.

1) При ставке дисконтирования, равной *IRR*, инвестиционные вложения в точности окупаются доходами, но не приносят прибыль. Действительно, как следует из свойств чистой современной стоимости проекта, равенство $NPV(r) = 0$ означает, что при ставке дисконтирования, равной *IRR*, проект ни прибыльный, ни убыточный.

Уравнения (6.8) и (6.9) можно записать иначе:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+r)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+r)^t} dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^k} + \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+r)^t} \qquad (6.10)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+r)^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^k}\ . \qquad (6.11)$$

Равенства (6.10) и (6.11) означают, что при ставке дисконтирования, равной *IRR*, современные стоимости потока инвестиций в проект и потока доходов совпадают.

2) Выясним, при каких условиях внутренняя норма доходности проекта r, т.е. значение показателя *IRR*, является среднегодовой доходностью этого проекта. Рассмотрим проект с дискретным потоком платежей, члены которого удовлетворяют условию $\sum_{k=0}^{n} R_k > 0$. Реализацию проекта будем рассматривать как финансовую операцию за счет собственных средств инвестора. При ставке дисконтирования, равной r, денежная оценка начального состояния инвестора имеет вид:

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^k}\ . \qquad (6.12)$$

Если доходы от проекта реинвестируются по ставке r до окончания проекта, то денежная оценка момента окончания проекта T для инвестора имеет вид:

$$P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+r)^{T-k}\ . \qquad (6.13)$$

Тогда согласно формуле (2.2)

$$P(T) = P(0)(1+\bar{r})^T \ ,$$

где $\bar{r}$ - среднегодовая доходность инвестиций в проект. Подставим в это равенство выражения (6.12) и (6.13):

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (1+r)^{T-k} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^k} \ (1+\bar{r})^T \ .$$

Отсюда

$$(1+r)^T \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+r)^k} = (1+\bar{r})^T \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+r)^k} \ .$$

Учитывая равенство (6.11), получим $r = \bar{r}$. Таким образом, внутренняя норма доходности проекта r является среднегодовой доходностью этого проекта, если в течение всего срока проекта ставка дисконтирования равна r и все доходы от проекта реинвестируются по ставке r до окончания проекта. Тогда для *IRR* справедлива формула:

$$IRR = \left(\frac{P(T)}{P(0)} \right)^{\frac{1}{T}} - 1 \ . \qquad (6.14)$$

IRR - это относительный показатель, показывает среднегодовой темп увеличения капитала инвестора. Чем выше *IRR*, тем больше эффективность инвестиций. На этот показатель ориентируются при стремлении максимизировать относительную отдачу от инвестиций.

Оценка проекта в значительной мере зависит от того, насколько отличаются ставка дисконтирования i и показатель *IRR* проекта. Установим связь между $NPV(i)$ проекта и разностью $(IRR - i)$. Рассмотрим проект классического характера с дискретным потоком платежей. Тогда $NPV(i) = \sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+i)^k}$, причем $NPV(i=0) = \sum_{k=0}^{n} R_k > 0$, иначе проект не рассматривается, так как является заведомо убыточным. Пусть r – решение уравнения $NPV(r)$ = 0, которое имеет вид $\sum_{k=0}^{n}\frac{R_k}{(1+r)^k}=0$. Согласно теореме 4.2, для проекта классического характера, удовлетворяющего условию $\sum_{k=0}^{n}R_k>0$, это решение является положительным и единственным.

Так как $NPV(i) = NPV(i) – NPV(r)$, то

$$NPV(i) = \sum_{k=0}^{n}\frac{R_k}{(1+i)^k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{R_k}{(1+r)^k}=\sum_{k=0}^{n}R_k\left(\frac{1}{(1+i)^k}-\frac{1}{(1+r)^k}\right)=\sum_{k=0}^{n}R_k\,\frac{(1+r)^k-(1+i)^k}{(1+r)^k(1+i)^k}=$$

$$=(r-i)\sum_{k=0}^{n}R_k\,\frac{\left((1+r)^{k-1}+(1+r)^{k-2}(1+i)+\ldots+(1+r)(1+i)^{k-2}+(1+i)^{k-1}\right)}{(1+r)^k(1+i)^k}=(r-i)\sum_{k=0}^{n}R_k a_k(r,i)=$$

= $(r – i)\,A(r, i)$. Таким образом,

$$NPV(i) = (r – i)\,A(r, i),$$

где $A(r, i) = \sum_{k=0}^{n}R_k a_k(r,i)$. Покажем, что $A(r, i) > 0$ для всех $i\in[0,+\infty[$. Так как r – единственное положительное решение уравнения $NPV(r) = 0$, то $A(r, i) \neq 0$ при всех $i\in[0,+\infty[$. Значит, $A(r, i)$ сохраняет знак на множестве $i\in[0,+\infty[$. Рассмотрим значение $A(r, i = 0)$. Полагая $i = 0$, получим

$$NPV(i = 0) = rA(r, i = 0) = \sum_{k=0}^{n}R_k>0\ .$$

Отсюда $A(r, i = 0) > 0$. Следовательно, $A(r, i) > 0$ для всех $i\in[0,+\infty[$. (Заметим, что непосредственное вычисление дает $A(r, i = 0) = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}R_k\left(1-\frac{1}{(1+r)^k}\right)$ =

= $\frac{1}{r}\left(\sum_{k=0}^{n}R_k-\sum_{k=0}^{n}\frac{R_k}{(1+r)^k}\right)$ = $\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}R_k > 0$). Так как r – значение показателя IRR проекта, то окончательно получаем

$$NPV(i) = (IRR – i)\,A(IRR, i), \qquad (6.15)$$

где $A(IRR, i) > 0$ при $i\in[0,+\infty[$. Из (6.15) следует, что для проекта классического характера знаки показателя $NPV(i)$ и разности $(IRR – i)$ совпадают. Кроме того, можно показать, что с увеличением разности ($IRR - i$) значение $NPV(i)$ возрастает и наоборот (см. рисунки 7.8 и 7.11, параграф 1.7). На основе полученного выражения (6.15) сформулируем следующие свойства показателя *IRR*.

3) Для проекта классического характера справедливы следующие утверждения:

$NPV(i) > 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i < IRR$;

$NPV(i) < 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i > IRR$;

$NPV(i) = 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i = IRR$.

Эти утверждения следуют непосредственно из выражения (6.15).

Для проектов *A* и *B* в примерах 6.1 и 6.3 получено $NPV(i) > 0$ и $i < IRR$; для проекта *C* значение $NPV(i) < 0$, при этом ставка дисконтирования $i > IRR$.

Таким образом, оценка проекта по показателю *IRR* формулируется следующим образом: если ставка дисконтирования $i < IRR$, то проект является выгодным; если $i > IRR$, то проект является убыточным. $i = IRR$ – это максимальная ставка дисконтирования, при которой проект не является убыточным.

Пример 6.4. Уравнение доходности для проекта примера 6.2 имеет вид:

$$NPV(r) = 100000\, a_{n,r} - 1000000 = 0.$$

Приближенное решение этого уравнения методом линейной интерполяции есть $r \approx 0{,}055568$. Так как $r > i = 0{,}05$, то проект является выгодным, что подтверждает оценку этого проекта по показателю $NPV(i)$.

Рассмотрим проект классического характера вида (6.1) или (6.2), i – годовая ставка дисконтирования. В ходе реализации проекта ставка дисконтирования может измениться, как правило, в сторону увеличения. Тогда, если значения *IRR* и i близки, проект является рисковым. В результате увеличения ставки дисконтирования оценка проекта может измениться на противоположную.

Пример 6.5. Рассмотрим проект (-100,-20,20,20,80,50,10,20). Ставка дисконтирования 13 % годовых. Внутренняя норма доходности проекта 13,3 % годовых. Так как $i < IRR$, то проект является выгодным. Чистая современная стоимость проекта $NPV(i) = 1{,}3 > 0$. Если ставка дисконтирования увеличится до 14 % годовых, то проект окажется неприемлем, так как его $NPV(i) = -2{,}8 < 0$.

Кроме того, в ходе реализации проекта может возникнуть необходимость увеличения инвестиций в проект, что также влечет изменение оценки проекта. По свойству 3 $NPV(i)$, максимальная величина, на которую можно увеличить инвестиции в проект при данных доходах и ставке дисконтирования i так, чтобы проект не стал убыточным – это значение показателя $NPV(i)$ проекта, где $NPV(i) > 0$. Что влияет на величину $NPV(i) > 0$ и на сколько может увеличиться ставка дисконтирования, чтобы проект не стал убыточным? Рассмотрим следующее свойство IRR.

4) Чем больше разность $(IRR - i)$, где $i < IRR$, тем больше резерв безопасности (или экономическая «прочность») проекта. Разность $(IRR - i)$ определяет устойчивость проекта в отношении изменения ставки дисконтирования. Кроме того, разность $(IRR - i)$ определяет предельную возможность увеличения инвестиций в проект, позволяющую избежать убытков при данных доходах и ставке дисконтирования i.

Действительно, из (6.15) следует, что разность $(IRR - i)$, где $i < IRR$, представляет собой максимальную величину, на которую можно увеличить ставку дисконтирования: увеличение ставки дисконтирования до значения IRR проекта приводит к $NPV(i = IRR) = 0$, когда проект ни прибыльный, ни убыточный. Увеличение ставки дисконтирования на величину, превышающую $(IRR - i)$, делает проект убыточным (пример 6.5). Таким образом, чем больше разность $(IRR - i)$, тем больше устойчивость проекта в отношении процентного риска.

С другой стороны, как следует из (6.15), разность $IRR - i > 0$ определяет значение $NPV(i) > 0$, а следовательно, максимальную величину, на которую можно увеличить инвестиции в проект так, чтобы избежать убытков (см. свойство 3 $NPV(i)$).

Инвестору важно знать срок возврата вложенных средств.

Определение. Срок окупаемости проекта (DPP) – это срок действия проекта $n^* \le T$, за который современная стоимость потока доходов становится равной современной стоимости потока инвестиций в проект.

Таким образом, если n^* – срок окупаемости проекта, то

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}, \qquad (6.16)$$

и для проекта с дискретным потоком платежей

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} = \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k}. \qquad (6.17)$$

Так как не всегда существует целое n^*, при котором выполняются равенства (6.16), (6.17), то приближенное значение срока окупаемости определяют следующим образом: n^* - наименьшее целое, не превышающее срок проекта $T = n$ лет, такое, что

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt \ge \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}, \qquad (6.18)$$

и для проекта с дискретным потоком платежей

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k}{(1+i)^k} \ge \sum_{k=0}^{n^*} \frac{b_k}{(1+i)^k}. \qquad (6.19)$$

При сроке действия проекта $(n^* - 1)$ лет современная стоимость потока доходов меньше современной стоимости потока расходов:

$$\sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*-1} \frac{f_2(t)}{(1+i)^t} dt < \sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*-1} \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{a_k}{(1+i)^k} < \sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{b_k}{(1+i)^k} \ .$$

Знак равенства в (6.18), (6.19) соответствует точному (как правило, не целому) значению срока окупаемости, удовлетворяющему определению. Точное значение срока окупаемости можно найти, если поток платежей в проекте рассматривается как непрерывный или если n^* можно аналитически выразить через характеристики потока (см. параграф 1.7).

Свойства и экономическое содержание срока окупаемости.

1) Срок окупаемости – это время, необходимое для полной компенсации инвестиций в проект доходами от проекта. Это утверждение следует из определения срока окупаемости.

2) Если ставка дисконтирования равна внутренней норме доходности проекта *IRR*, то срок окупаемости проекта совпадает с его сроком, т.е. $n^* = T = n$ лет. Это утверждение следует из определения показателей *IRR* и *DPP* (см. также равенства (6.10), (6.11) и (6.16), (6.17)).

3) Срок окупаемости проекта n^* - это срок действия проекта $n^* \leq n$, за который его чистая современная стоимость становится неотрицательной.

Для проекта с классической схемой инвестирования несложно убедиться, что с увеличением срока действия проекта, содержащего период отдачи, чистая современная стоимость проекта возрастает, начиная с отрицательных значений.

Из определения срока окупаемости, например, из (6.16) получаем

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{a_k - b_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f_2(t) - f_1(t)}{(1+i)^t} dt \ = \ \sum_{k=0}^{n^*} \frac{R_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f(t)}{(1+i)^t} dt \ = \ 0 = \ NPV(i) \text{ за период } n^*, \text{ т.е.}$$

$$NPV_{n^*}(i) = 0.$$

Аналогично из (6.18) и (6.19) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n^*} \frac{R_k}{(1+i)^k} + \int_0^{n^*} \frac{f(t)}{(1+i)^t} dt \ge 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n^*} \frac{R_k}{(1+i)^k} \ge 0 \ ,$$

что означает $NPV(i) \ge 0$ за период n^*, т.е.

$$NPV_{n^*}(i) \ge 0 \ . \qquad (6.20)$$

При сроке действия проекта $(n^* - 1)$ лет его $NPV_{n^*-1}(i) < 0$, то есть, n^* - наименьшее целое, при котором чистая современная стоимость проекта неотрицательна. Таким образом, если существует такой срок действия проекта $n^* \le n$, за который его чистая современная стоимость становится неотрицательной, то его называют сроком окупаемости проекта.

Срок окупаемости проекта n^* находят на основе этого свойства, т.е. n^* - наименьшее целое, такое, что $n^* \le n$, при котором выполняется неравенство (6.20).

Пример 6.6. Расчет срока окупаемости проекта B(-1000,-300,500,500,500,500). Ставка дисконтирования 5 % годовых.

	0	1	2	3	4	5
R_k	-1000	-300	500	500	500	500
$R_k/(1+i)^k$	-1000	-286	454	432	411	392
$\Sigma R_k/(1+i)^k$	-1000	-1286	-832	-400	11,1	402,8

Нижняя строка таблицы – чистая современная стоимость проекта для сроков его действия от 0 до 5 лет. Период отдачи – 4 года, начиная со 2-го года. Сроки действия проекта от 2-х до 5 лет содержат период отдачи. Чистая современная стоимость проекта возрастает, начиная с 2-хлетнего срока его действия, т.е. с началом периода отдачи. Из таблицы следует, что срок окупаемости проекта n^*= 4 года. Действительно, так как $NPV_3(i) = -400 < 0$, $NPV_4(i) = 11{,}1 > 0$, то наименьшее целое $n^* \le 5$, при котором выполняется неравенство $NPV_{n^*}(i) \ge 0$, это $n^* = 4$ (точное значение срока окупаемости меньше 4).

Найдем срок окупаемости проекта A:

(-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты

$t = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$)

при ставке дисконтирования 5 % годовых. Наименьшее целое $n^* \le 16$, при котором выполняется неравенство $NPV_{n^*}(i) \ge 0$, т.е.

$$-1000 - \frac{2000}{1+i} - \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{1500}{(1+i)^4} + \int_6^{n^*} \frac{1000\,dt}{(1+i)^t} \ge 0 ,$$

или

$$-1000 - \frac{2000}{1+i} - \frac{3000}{(1+i)^2} + \frac{1500}{(1+i)^4} + \frac{1000}{\ln(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^6} - \frac{1}{(1+i)^{n^*}}\right] \ge 0 ,$$

- это $n^* = 13$, так как $NPV_{12}(i) = -510 < 0$, $NPV_{13}(i) = 33 > 0$ (точное значение срока окупаемости 12,96).

4) Проект классического характера имеет срок окупаемости тогда и только тогда, когда его показатель $NPV(i) \ge 0$. Если $NPV(i) < 0$, то проект не имеет срока окупаемости.

Действительно, предположим, проект имеет срок окупаемости. Тогда существует наименьшее целое $n^* \le n$, при котором $NPV_{n^*}(i) \ge 0$. Отсюда показатель проекта $NPV(i) \ge 0$. И наоборот. Из того, что $NPV(i) \ge 0$ следует, что существует наименьшее целое $n^* \le n$, при котором $NPV_{n^*}(i) \ge 0$. Второе утверждение является следствием первого и доказывается методом от противного.

5) Проект классического характера имеет срок окупаемости тогда и только тогда, когда его ставка дисконтирования $i \le IRR$. Если ставка дисконтирования проекта $i > IRR$, проект не имеет срока окупаемости. Это утверждение является следствием предыдущего свойства DPP проекта и свойства 3 показателя IRR.

Проекты A и B (пример 6.6) имеют срок окупаемости. Ранее для этих проектов в примерах 6.1 и 6.3 получено $NPV(i) > 0$ и $i < IRR$. Проект из примера 6.2 имеет срок окупаемости $n^* = 15$ лет. Ранее для этого проекта установлено $NPV(i) > 0$ и $i < IRR$ (примеры 6.2 и 6.4).

Проект C, для которого $NPV(i) < 0$ и ставка дисконтирования $i > IRR$ (примеры 6.1 и 6.3), не имеет срока окупаемости ($i = 12$ %):

	0	1	2	3
R_k	-90	30	40	40
$R_k/(1+i)^k$	-90	26,79	31,9	28,5
$\Sigma R_k/(1+i)^k$	-90	-63,2	-31	-2,9

Очевидно, что если не существует срок окупаемости, то проект не принимается. Один из критериев оценки проекта – минимизация срока окупаемости. Однако этот критерий не является самым важным при выборе инвестиционного проекта. Расчет срока окупаемости является целесообразным, если инвестиции сопряжены с высокой степенью риска. Тогда чем меньше срок окупаемости, тем менее рискованным является проект.

Недостатком показателя DPP является то, что этот показатель не учитывает доходов за весь срок проекта. Следствием этого недостатка может быть неверная оценка проекта.

Пример 6.7. Рассмотрим два инвестиционных проекта, сроки которых одинаковы: D(-100,-10,20,60,60,60,20,5) и E(-40,-50,-50,-20,90,90,80,70), ставка дисконтирования 13 % годовых. Сроки окупаемости проектов $n_D^* = 5$ лет и $n_E^* = 6$ лет. $NPV(i)^D = 29{,}49$ и $NPV(i)^E = 34{,}96$. Оба проекта выгодны. Однако $NPV(i)^E > NPV(i)^D$. Сравним величины $NFV(i)$ проектов. $NFV(i)^D = NPV(i)^D(1+0{,}13)^7 = 69{,}38$; $NFV(i)^E = NPV(i)^E(1+0{,}13)^7 = 82{,}25$. Несмотря на то, что $n_D^* < n_E^*$, проект

E выгоднее проекта D, так как на момент окончания проектов фактически получаемый доход по проекту E больше, чем по проекту D.

Определение. Индекс доходности (PI) проекта – это число d, равное отношению современных стоимостей доходов и инвестиций в проект:

$$d = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_2(t)}{(1+i)^t}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k} + \int_0^T \frac{f_1(t)}{(1+i)^t}}\ . \tag{6.21}$$

Для проекта с дискретным потоком платежей

$$d = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}}\ . \tag{6.22}$$

Пример 6.8.

Индекс доходности проекта A

(-1000, -2000, -3000, 1500 в моменты

$t = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 4$; $f(t) = 1000$, $6 \le t \le 16$),

$i = 5$ % годовых:

$$d = \frac{\frac{1500}{(1+i)^4} + \int_6^{16} \frac{1000dt}{(1+i)^t}}{1000 + \frac{2000}{1+i} + \frac{3000}{(1+i)^2}} = \frac{\frac{1500}{(1+i)^4} + \frac{1000}{\ln(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^6} - \frac{1}{(1+i)^{16}}\right]}{1000 + \frac{2000}{1+i} + \frac{3000}{(1+i)^2}} = 1{,}27.$$

Индекс доходности проекта B (-1000,-300,500,500,500,500), $i = 5$ % годовых:

$$d = \frac{\frac{500}{(1+i)^2} + \frac{500}{(1+i)^3} + \frac{500}{(1+i)^4} + \frac{500}{(1+i)^5}}{1000 + \frac{300}{1+i}} = 1{,}31.$$

Индекс доходности проекта C (-90,30,40,40), $i = 12$ % годовых:

$$d = \frac{\frac{30}{(1+i)} + \frac{40}{(1+i)^2} + \frac{40}{(1+i)^3}}{90} = 0{,}97.$$

Свойства и экономическое содержание индекса доходности.

1) Показатель PI характеризует уровень доходов на единицу затрат, т.е. эффективность вложений. $d > 1$ – доходы окупают вложенные инвестиции; $d < 1$ - инвестиции в проект не окупаются; $d = 1$ – проект ни прибыльный ни убыточный.

Проекты A и B примера 6.8 являются прибыльными, так как их $PI > 1$. Проект C – убыточный, так как его $PI < 1$. Эти выводы подтверждают оценку этих проектов по показателям $NPV(i)$ и IRR.

2) Если ставка дисконтирования равна внутренней норме доходности проекта IRR, то индекс доходности проекта $d = 1$. Это утверждение следует из определений показателей IRR и PI (см. также равенства (6.16), (6.17) и (6.21), (6.22)).

3) Если срок проекта совпадает с его сроком окупаемости, то индекс доходности проекта $d = 1$. Это утверждение следует из определений показателей DPP и PI (см. также равенства (6.10), (6.11) и (6.21), (6.22)).

4) Показатели PI и $NPV(i)$ согласуются между собой в оценке проекта. Действительно, преобразуем, например, выражение (6.22):

$$d = 1 + \frac{NPV(i)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}} \; . \quad (6.23)$$

Тогда

$d > 1$ тогда и только тогда, когда $NPV(i) > 0$;

$d < 1$ тогда и только тогда, когда $NPV(i) < 0$;

$d = 1$ тогда и только тогда, когда $NPV(i) = 0$.

Из этого свойства следует эквивалентность оценки проекта по показателям $NPV(i)$ и PI.

5) Показатели PI и IRR согласуются между собой в оценке проекта. Подставим выражение (6.15) в (6.23):

$$d = 1 + \frac{(IRR - i)\ A(IRR, i)}{\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}}\ , \qquad (6.24)$$

где $A(IRR, i) > 0$ для всех $i \in [0, +\infty[$. Тогда

$d > 1$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i < IRR$;

$d < 1$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i > IRR$;

$d = 1$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i = IRR$.

6) Чем больше показатель PI превосходит единицу, тем больше резерв безопасности проекта. Действительно, чем больше $d > 1$, тем больше разность $(IRR - i) > 0$ (см. рис. 7.10 и 7.13, параграф 1.7), а следовательно, по свойству 4 IRR, экономическая «прочность» проекта.

PI - относительный показатель. Если требуется сделать выбор из нескольких проектов по этому показателю, то выбирается проект с наибольшим индексом доходности среди всех проектов, для которых этот показатель больше либо равен единице.

Итак, рассмотрены показатели эффективности инвестиционного проекта, основанные на дисконтировании членов денежного потока проекта. Основной вывод, который можно сделать – это согласованность показателей эффективности в оценке проекта. Действительно, из свойств показателей классического инвестиционного проекта имеем:

$NPV(i) > 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i < IRR$, индекс доходности $PI > 1$, существует срок окупаемости проекта DPP;

$NPV(i) = 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i = IRR$, индекс доходности $PI = 1$, срок окупаемости проекта $DPP = T$;

$NPV(i) < 0$ тогда и только тогда, когда ставка дисконтирования $i > IRR$, индекс доходности $PI < 1$, не существует срок окупаемости DPP проекта.

В первых двух случаях проект по всем показателям приемлем. В последнем случае проект не приемлем также по всем показателям. Расчеты показателей в примерах для проектов *A*, *B*, *C* подтверждают эти выводы:

проект *A*:

i = 5 % < *IRR* = 8,2 %, *NPV*(i) = 1513,16 > 0, *DPP* = 13 лет, *PI* = 1,27 > 1;

проект *B*:

i = 5 % < *IRR* = 14,43 %, *NPV*(i) = 402,8 > 0, *DPP* = 4 года, *PI* = 1,31 > 1;

проект *C*:

i = 12 % > *IRR* = 10,23 %, *NPV*(i) = - 2,86 < 0, нет *DPP*, *PI* = 0,97 < 1.

Отметим, что основными считаются показатели *NPV*(i), *IRR* и *PI*.

Замечание. Как установлено (свойство 2 *IRR*), среднегодовая доходность проекта совпадает с его *IRR*, если доходы от проекта реинвестируются под ставку r = *IRR* до окончания проекта. Практически эти доходы можно инвестировать под ставку дисконтирования i (i – ставка, по которой инвестор может одолжить или дать деньги взаймы). Тогда среднегодовая доходность проекта r^* рассчитывается следующим образом. Согласно формуле (2.2):

$$P(T) = P(0)(1+r^*)^T ,$$

где $P(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(1+i)^k}$ - современная стоимость инвестиций в проект по ставке i;

$P(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k (1+i)^{T-k}$ - результат реинвестирования доходов по проекту под ставку i к моменту T окончания проекта (будущая стоимость доходов по ставке i). r^* называют **модифицированной внутренней нормой доходности** проекта (*MIRR*). Тогда

$$MIRR = \left(\frac{P(T)}{P(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 , \qquad (6.25)$$

где $P(0)$ и $P(T)$ рассчитываются по приведенным здесь формулам. По этому показателю проект принимается, если ставка дисконтирования проекта $i < MIRR$.

Сравнение двух инвестиционных проектов.

Если требуется сделать выбор из нескольких проектов, то согласованность между показателями эффективности уже отсутствует: один проект имеет большее значение $NPV(i)$, другой – показателя IRR и т.д. Исследования показывают, что при сравнении проектов в случае противоречия между показателями чаще отдается предпочтение показателю $NPV(i)$. По этому показателю проект 1 является более выгодным, чем проект 2, если $NPV(i)^1 > NPV(i)^2$.

Пример 6.9. Инвестор рассматривает возможность помещения денег в один из следующих проектов. Проект F, по которому инвестирование 11000 д.е. обеспечивает годовой доход 600 д.е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 15 лет, и возмещение расходов инвестора в конце этого срока. Проект G, по которому инвестирование 20000 д.е. обеспечивает годовой доход 2655 д.е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 10 лет.

Инвестор может ссужать или занимать деньги под 5 % годовых. Какой проект является более выгодным для инвестора?

Денежный поток проекта F имеет вид: (-11000, 600,…, 600 + 11000). Поток доходов – годовая обычная рента в течение 15 лет плюс дополнительный платеж в конце этого срока. Тогда

$$NPV(i)^F = -11000 + 600a_{15;\,0,05} + \frac{11000}{(1+i)^{15}} = 518{,}98.$$

Показатель IRR находим из уравнения доходности проекта $NPV(r)^F = 0$, откуда получаем $IRR^F = 5{,}45$ % годовых.

Денежный поток проекта G имеет вид: (-20000, 2655, …, 2655). Поток доходов - годовая обычная рента в течение 10 лет.

$$NPV(i)^G = -20000 + 2655a_{10;\,0,05} = 501{,}21.$$

Решение уравнения доходности $NPV(r)^G = 0$ дает $IRR^G = 5{,}51$ % годовых.

Так как IRR^F, $IRR^G > i = 5$ %, то оба проекта выгодны. При этом $IRR^F < IRR^G$, однако $NPV(i)^F > NPV(i)^G$. Хотя доходность по проекту F меньше, чем по проекту G, инвестор может извлечь большую выгоду из проекта F. Прибыль инвестора (по сравнению с размещением денег на банковский счет) в результате реализации проекта F составит

$$NFV(i)^F = NPV(i)^F(1+0{,}05)^{15} = 1078{,}93,$$

а проекта G соответственно

$$NFV(i)^G = NPV(i)^G(1+0{,}05)^{15} = 1047{,}97.$$

Таким образом, проект F является более выгодным с точки зрения максимизации прибыли.

1.7. Зависимость показателей эффективности от параметров инвестиционного проекта.

Параметры проекта – это величины членов денежного потока, их распределение во времени и процентная ставка дисконтирования. Зависимость показателей эффективности от параметров проекта классического характера рассмотрим для проекта, в котором инвестиции - разовые в момент $t = 0$ в размере I, поток доходов – постоянная годовая обычная (неотложенная) рента в течение n лет. Годовой доход R. Ставка дисконтирования проекта – годовая процентная ставка i. Проект описывается финансовым потоком вида

$$(-I, R,\dots, R). \qquad (7.1)$$

Показатели эффективности проекта (7.1) рассчитываются на основе современных стоимостей потока доходов $Ra_{n,i}$ и инвестиций I.

Чистая современная стоимость проекта при процентной ставке i:

$$NPV(i) = Ra_{n,i} - I\ , \tag{7.2}$$

Значение показателя IRR - решение уравнения доходности $NPV(r) = 0$, которое для проекта (7.1) имеет вид:

$$Ra_{n,r} - I = 0. \tag{7.3}$$

Срок окупаемости n^* определяется из уравнения:

$$Ra_{n*,i} = I \tag{7.4}$$

Индекс доходности проекта (7.1) равен:

$$d = \frac{Ra_{n,i}}{I}\ . \tag{7.5}$$

Зависимость показателей эффективности от срока проекта (периода отдачи) n рассмотрим, считая заданными размеры вложенных инвестиций I, поступающих платежей R и процентную ставку дисконтирования i. Срок проекта (7.1) совпадает с его периодом отдачи. Параметры I, R, i определяют окупаемость проекта. Действительно, при заданных I, R, i условие возврата инвестиции, или, что тоже самое, условие существования срока окупаемости проекта, - это условие разрешимости уравнения (7.4), т.е. задачи о сроке ренты (см. параграф 1.5). Условие существования срока окупаемости проекта запишем в виде:

$$\frac{R}{i} - I > 0 \tag{7.6}$$

1) Рассмотрим зависимость показателя $NPV(i)$ от срока n проекта при заданных I, R, i. Чистая современная стоимость проекта (7.1) рассчитывается по формуле:

$$NPV(i) = Ra_{n,i} - I\ ,$$

коэффициент дисконтирования ренты $a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, где $n \geq 0$ (не только целое, см. **Замечание** в параграфе 1.5). Тогда $\left(NPV(i)\right)_n^{/} > 0$, $\left(NPV(i)\right)_{nn}^{//} < 0$.

Следовательно, $NPV(i)$ – возрастающая вогнутая функция n на множестве $[0, \infty[$, причем $NPV(i)\Big|_{n=0} = -I < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} NPV(i) = \dfrac{R}{i} - I$. Значение последнего предела – это $NPV(i)$ проекта, в котором поток доходов – вечная рента. Если считать, что параметры i, R, I проекта (7.1) таковы, что выполняется условие (7.6), то существует единственная точка $n^* > 0$ такая, что

$$NPV(i)\Big|_{n=n^*} = NPV_{n^*}(i) = 0.$$

Согласно свойству 3 срока окупаемости (параграф 1.6), n^* - срок окупаемости (DPP) проекта (7.1). Таким образом, неравенство (7.6) является не только условием существования срока окупаемости проекта (7.1), но и условием существования проектов с $NPV(i) \geq 0$.

График зависимости показателя $NPV(i)$ от срока проекта n показан на рисунке 1.7.1:

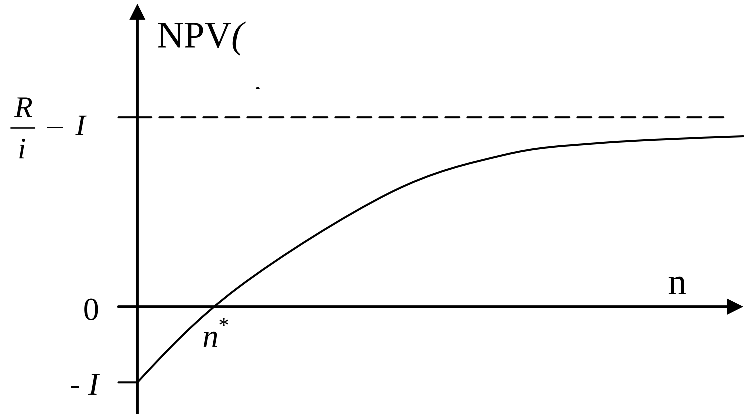


Рис. 1.7.1

Чем больше срок проекта (7.1), тем больше его $NPV(i)$. Найдем n^* из уравнения $NPV_{n^*}(i) = 0$, что равносильно уравнению (7.4), при условии (7.6):

$$n^* = \frac{-\ln(1 - \frac{I}{R}i)}{\ln(1+i)} . \qquad (7.7)$$

Если n^*, определенное по (7.7), удовлетворяет условию $n^* \leq n$, где n – срок проекта, то (7.7) - формула точного значения срока окупаемости проекта (7.1) (см. определение срока окупаемости, параграф 1.6). Если срок проекта $n < n^*$, то проект не имеет срока окупаемости. При этом его $NPV(i) < 0$. Чтобы проект окупался при данных ставке i, инвестициях I и доходах R необходимо, чтобы продолжительность проекта была не меньше n^*.

2) При заданных значениях I, R, i установим зависимость показателя *IRR* проекта (7.1) от его срока n. Из уравнения (7.3) имеем $a_{n,r} = \frac{I}{R}$, где $n \geq 0$. Дифференцируем это выражение по n: $\frac{\partial a_{n,r}}{\partial n} + \frac{\partial a_{n,r}}{\partial r} r_n^{/} = 0$. Отсюда $r_n^{/} = -\frac{\frac{\partial a_{n,r}}{\partial n}}{\frac{\partial a_{n,r}}{\partial r}}$.

Так как $a_{n,r} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, то $\frac{\partial a_{n,r}}{\partial n} > 0$. С другой стороны, так как $a_{n,r} = \frac{1}{1+r} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}$, то $\frac{\partial a_{n,r}}{\partial r} < 0$. Следовательно, $r_n^{/} > 0$. Значит, $r(n)$ - возрастающая функция на множестве $[0, \infty[$. Так как $r < \frac{R}{I}$ для каждого конечного $n > 0$, то $n = \frac{-\ln(1 - \frac{I}{R}r)}{\ln(1+r)}$. Отсюда $n \to 0$ при $r \to -1$ и $n \to +\infty$ при $r \to \frac{R}{I}$. Кроме того, если $r = 0$, то $n = \frac{I}{R}$. График зависимости $r(n)$ показан на рисунке 1.7.2:

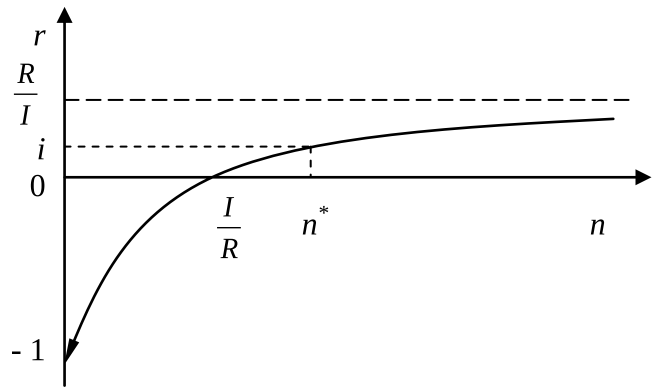


Рис. 1.7.2

С увеличением срока проекта (7.1) его показатель *IRR* возрастает, приближаясь к значению *IRR* проекта, поток доходов которого – вечная рента. Заметим, что если срок проекта меньше $\frac{I}{R}$, то доходность проекта отрицательна. И наоборот – значениям $r > 0$ соответствуют сроки проекта $n > \frac{I}{R}$ (см. условие разрешимости задачи о процентной ставке ренты, параграф 1.5). При $r = i$ срок проекта n совпадает с его сроком окупаемости n^*, т.е. $n = n^*$ (свойство 2 срока окупаемости, параграф 1.6). Значениям $r < i$ соответствует срок проекта $n < n^*$ - проект является убыточным (свойство 3 показателя *IRR*, параграф 1.6) и не имеет срока окупаемости (см. свойство 5 срока окупаемости, параграф 1.6). При $r > i$ срок проекта $n > n^*$ - проект прибыльный и имеет срок окупаемости.

3) Рассмотрим зависимость индекса доходности d от срока n проекта (7.1) при заданных i, R, I. Будем считать, что параметры i, R, I проекта таковы, что выполняется условие (7.6): $\frac{R}{i} - I > 0$.

Согласно определению, индекс доходности проекта (7.1) рассчитывается по формуле (7.5). Тогда

$$d = \frac{Ra_{n,i}}{I} = \frac{R}{I}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \ ,$$

где $n \geq 0$. Отсюда

$$d_n^{/} > 0,\ d_{nn}^{//} < 0,\ d\Big|_{n=0} = 0,\ \lim_{n\to\infty} d = \frac{R}{I\,i} > 1 .$$

Характер зависимости $d(n)$ показан на рисунке:

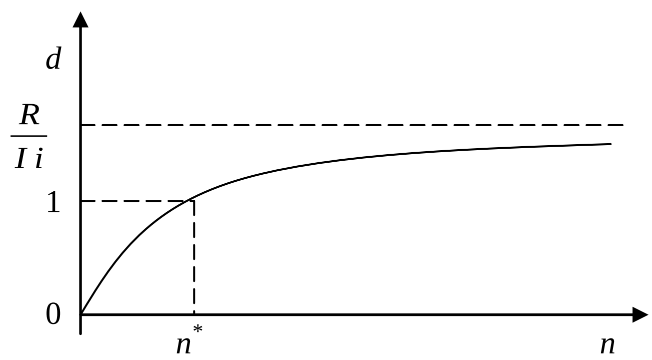


Рис. 1.7.3

С увеличением срока проекта (7.1) его показатель *PI* возрастает, приближаясь к значению *PI* проекта, поток доходов которого – вечная рента. Значению $d = 1$ соответствует срок проекта $n = n^*$, где n^* - срок окупаемости проекта (свойство 3 *PI*, параграф 1.6). Если $n > n^*$, то проект имеет срок окупаемости, при этом $d >$ 1. При $n < n^*$ проект не имеет срока окупаемости, его индекс доходности $d < 1$.

Заметим, что условие (7.6) обеспечило существование проектов, индекс доходности которых $d \geq 1$.

Итак, показатели $NPV(i)$, *IRR*, *PI* возрастают при увеличении срока проекта (7.1). При этом срок окупаемости проекта существует, когда его $NPV(i) \geq 0$, $PI \geq 1$, а следовательно, $IRR \geq i$ (см свойство 5 *PI*, параграф 1.6), т.е. когда все остальные показатели указывают на приемлемость проекта. Заметим, что неравенство (7.6) при условии, что срок проекта $n \geq n^*$, обеспечивает приемлемость проекта по всем показателям, что также подчеркивает согласованность показателей в оценке проекта.

Замечание. Чем более протяжен во времени проект, тем более тщательная оценка требуется для членов денежного потока последних лет реализации проекта. Здесь инвестиционный проект рассматривается в условиях определенности, когда поступление платежей точно в срок и в полном объеме считается гарантированным.

Зависимость показателей эффективности от величины вложенных инвестиций *I* рассмотрим, считая заданными срок проекта *n*, размеры поступающих платежей *R* и ставку дисконтирования *i*.

1) Увеличение инвестиций в проект влечет уменьшение его *IRR* (формула 6.14). Рассмотрим подробнее зависимость показателя *IRR* проекта (7.1) от величины инвестиций *I*.

Уравнение $NPV(r) = 0$ для проекта (7.1) имеет вид: $I = Ra_{n,r}$, где $a_{n,r} = \frac{1}{1+r} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^n}$. Так как $I_r^{/} < 0$, $I_{rr}^{//} > 0$, то $r_I^{/} = \frac{1}{I_r^{/}} < 0$, $r_{II}^{//} = -\frac{1}{\left(I_r^{/}\right)^3} I_{rr}^{//} > 0$. Значит, $r(I)$ – убывающая выпуклая функция на множестве значений $I \in]0,+\infty[$. Если $r \to -1+0$, то $I \to +\infty$; если $r = 0$, то $I = nR$; если $r \to +\infty$, то $I \to 0$. График зависимости $r(I)$ показан на рисунке:

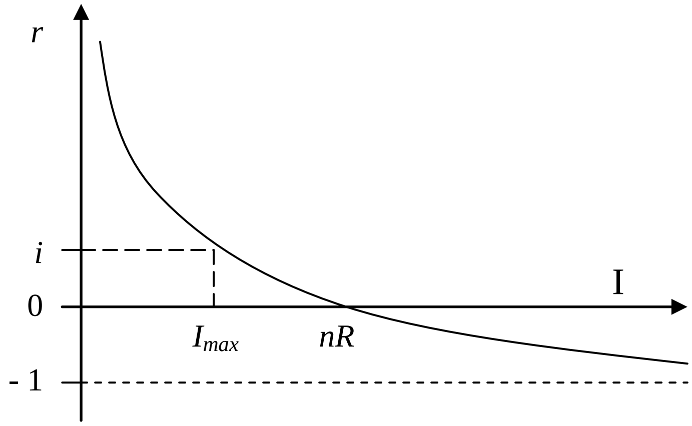


Рис. 1.7.4

С увеличением инвестиций I доходность проекта r уменьшается. При $I > nR$ доходность отрицательна, $r < 0$, проект заведомо убыточен. На этом рисунке значению $r = i$, где i – ставка дисконтирования проекта, соответствует максимальный уровень затрат I_{max}, при котором проект не является убыточным. Действительно, $NPV(r = i) = 0$, откуда $I_{max} = Ra_{n,i}$. Если $I > I_{max}$, то $r < i$, что означает убыточность проекта (см. свойство 3 *IRR,* параграф 1.6). И наоборот, значениям $I < I_{max}$ соответствуют $r > i$, при которых проект является прибыльным.

Замечание. Если исходить из того, что инвестиции в проект не могут превышать стоимости вечной ренты, т.е. выполняется условие (7.6): $I < \frac{R}{i}$, тогда анализ функции $r(I)$ требует уточнения. Рекомендуется рассмотреть это самостоятельно.

2) Чистая современная стоимость проекта (7.1) рассчитывается по формуле:

$$NPV(i) = Ra_{n,i} - I .$$

Определим множество значений показателя. Если считать, что $I \in \left]0,+\infty\right[$ при заданных R, n, i, то $NPV(i) \in \left]-\infty\ ;\ Ra_{n,i}\right[$. Если предполагается, что $I < \frac{R}{i}$, то $NPV(i) \in \left]Ra_{n,i} - \frac{R}{i}\ ;\ Ra_{n,i}\right[$, где $Ra_{n,i} - \frac{R}{i} < 0$.

Очевидно, что $NPV(i)$ – линейная функция I при заданных R, n, i.

Зависимость $NPV(i)$ проекта (7.1) от величины вложенных инвестиций имеет вид:

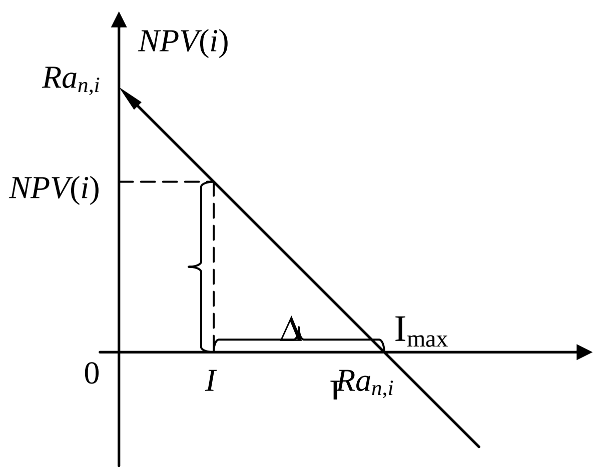


Рис. 1.7.5

Выколотая точка на вертикальной оси означает, что проект с нулевыми инвестициями и ненулевыми доходами не существует. С увеличением инвестиций I $NPV(i)$ проекта уменьшается. На этом рисунке значению $NPV(i)$ = 0 соответствует максимальный уровень затрат $I_{max} = Ra_{n,i}$, при котором проект не является убыточным. Если при некотором значении затрат I величина $NPV(i)$ > 0 и инвестиции в проект увеличить на величину Δ (см. рис. 7.5), то чистая современная стоимость полученного проекта станет равной нулю. На рисунке длины отрезков $NPV(i)$ и Δ равны между собой, как стороны прямоугольного равнобедренного треугольника. При этом длина отрезка $\Delta = Ra_{n,i} - I = NPV(i) >$ 0. Таким образом, увеличение инвестиций на величину, не превышающую $\Delta =$ $NPV(i) > 0$, позволяет избежать убытков. Увеличение инвестиций на величину, превышающую Δ, приводит к отрицательному значению чистой современной стоимости проекта, т.е. к убыткам (см. свойство 3 $NPV(i)$, параграф 1.6).

3) Очевидно, что чем меньше инвестиции, тем меньше срок окупаемости проекта. Уточним эту зависимость для проекта (7.1), считая заданными R, n, i.

Для существования срока окупаемости проекта (7.1) необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось условие (7.6). Значит, инвестиции I в проект таковы, что $I < \frac{R}{i}$. Найдем все решения уравнения (7.4) для $I \in \left]0, \frac{R}{i}\right[$. Те из них, которые удовлетворяют условию $n^* \leq n$, являются сроком окупаемости проекта. Рассмотрим (7.7):

$$n^* = \frac{-\ln(1 - \frac{I}{R} i)}{\ln(1+i)} .$$

Дифференцируем это выражение по I. Получаем $(n^*)'_I > 0,\ (n^*)''_{II} > 0$. Значит, $n^*(I)$ –возрастающая выпуклая функция на множестве $\left]0, \frac{R}{i}\right[$. Кроме того, $n^*\Big|_{I=0} = 0$ и $\lim\limits_{I \to \frac{R}{i} - 0} n^* = +\infty$. Зависимость $n^*(I)$ показана на рисунке:

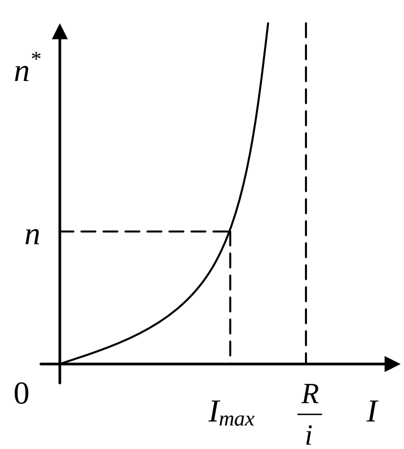


Рис. 1.7.6

С увеличением инвестиций I срок окупаемости проекта увеличивается. На этом рисунке значению $n^* = n$, где n – срок проекта, соответствует максимальный уровень затрат $I_{max} = Ra_{n,i}$, при котором проект не является убыточным. Действительно, если $I > I_{max}$, то $n^* > n$ – проект не имеет срока окупаемости, следовательно, является убыточным. И наоборот, значениям $I < I_{max}$ соответствуют $n^* < n$. Проект имеет срок окупаемости и за время n позволит получить прибыль.

4) Так как $d = \frac{Ra_{n,i}}{I}$, зависимость индекса доходности от величины вложенных инвестиций при заданных R, n, i имеет вид:

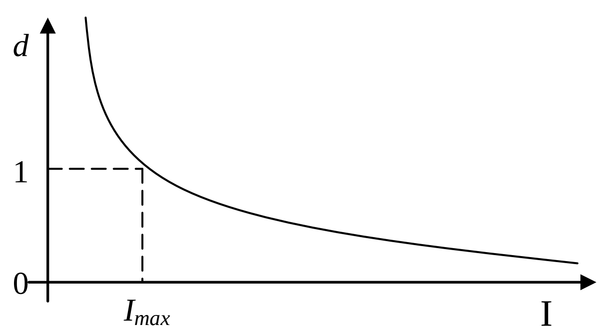


Рис. 1.7.7

С увеличением инвестиций в проект его индекс доходности уменьшается. Значению $d = 1$ соответствует максимальный уровень затрат $I_{max} = Ra_{n,i}$, при котором проект не является убыточным. Действительно, если $I > I_{max}$, то $d < 1$ – проект является убыточным. И наоборот, значениям $I < I_{max}$ соответствуют $d > 1$ – проект является прибыльным.

Итак, показатели IRR, $NPV(i)$, PI уменьшаются при увеличении инвестиций в проект, а показатель DPP увеличивается. Это означает, что в отношении увеличения инвестиций в проект все показатели ведут себя одинаково: каждый из них указывает на снижение эффективности проекта. Максимальный уровень затрат $I_{max} = Ra_{n,i}$, при котором проект не является убыточным, соответствует следующим значениям показателей: $NPV(i) = 0$, $IRR = i$, $DPP = n$, $PI = 1$.

Пример 7.1. Рассчитать, как изменится оценка проекта A(–100,–20,20,20,80,50,10,20), ставка дисконтирования i = 11 % годовых, если увеличить инвестиции в этот проект в конце 2-го года до 25 д.е.

В результате увеличения инвестиций в проект в конце 2-го года будет получен новый проект B(–100,–25,20,20,80,50,10,20). Показатели эффективности проектов следующие:

$$NPV(i)^A = 10{,}2;\ IRR^A = 13{,}3\ \%;\ n_A^* = 6;\ d^A = 1{,}086;$$

$$NPV(i)^B = 5{,}7;\ \ IRR^B = 12{,}3\ \%;\ n_B^* = 7;\ d^B = 1{,}046.$$

Увеличение инвестиций в проект A привело к уменьшению его показателей $NPV(i)$, IRR, PI и увеличению срока окупаемости. Для обоих проектов $NPV(i) > 0$, $i < IRR$, $d > 1$ - проект остался выгодным. Так как $NPV(i)^B < NPV(i)^A$ и $d^B < d^A$, то проект стал менее прибыльным. Так как $IRR^B < IRR^A$, то проект стал более рискованным (уменьшилась разность $IRR - i$).

Замечание. Рассмотреть самостоятельно зависимость показателей эффективности проекта (7.1) от величины его доходов R.

Зависимость показателей эффективности от ставки дисконтирования *i* рассмотрим при заданных доходах R, сроке проекта n, инвестициях I. Параметры R, n, I определяют значение показателя внутренней нормы доходности (IRR) проекта. Установим множество значений показателя IRR при заданных R, n, I. Значение показателя IRR при заданных R, n, I - решение r уравнения доходности (7.3). Покажем, что $r > 0$ тогда и только тогда, когда $I < nR$. Из уравнения доходности имеем:

$$Ra_{n,r} = I\ .$$

Тогда коэффициент дисконтирования $a_{n,r} = \frac{I}{R}$. С другой стороны, $a_{n,r} = \frac{1}{1+r} + ... + \frac{1}{(1+r)^n}$. Если решение уравнения (7.3) $r > 0$, тогда $a_{n,r} < n$. Значит, $\frac{I}{R} < n$. Отсюда $I < nR$. И наоборот. Пусть $I < nR$. Тогда согласно теореме 4.2 уравнение (7.3) имеет единственное положительное решение $r > 0$. Несложно убедиться, что отрицательное решение уравнения (7.3) $r < 0$ соответствует условию $I > nR$, что означает заведомую убыточность проекта. Этот случай может представлять только теоретический интерес, как и значения $r \to +\infty$. Таким образом, в общем случае $r \in \left]-1, +\infty\right[$. Однако если значения R, n, I заданы, то можно показать, что $r < \frac{R}{I}$. В этом случае показатель $r \in \left]-1, \frac{R}{I}\right[$. Таким образом, при заданных R, n, I показатель *IRR* проекта фиксирован и принимает одно из значений из указанного интервала.

1) Рассмотрим зависимость показателя $NPV(i)$ от ставки дисконтирования i. Будем считать, что параметры R, n, I таковы, что $I < nR$, что обеспечивает положительное значение показателя *IRR* проекта.

Имеем: $NPV(i) = Ra_{n,i} - I$, где коэффициент дисконтирования ренты $a_{n,i} = \frac{1}{1+i} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}$. Тогда $\left(NPV(i)\right)_i^{/} < 0$, $\left(NPV(i)\right)_{ii}^{//} > 0$. Значит, $NPV(i)$ – убывающая выпуклая функция i на множестве $\left[0, \infty\right[$, причем $NPV(i = 0) = nR - I > 0$, $\lim\limits_{i \to \infty} NPV(i) = -I < 0$. График функции $NPV(i)$ имеет вид:

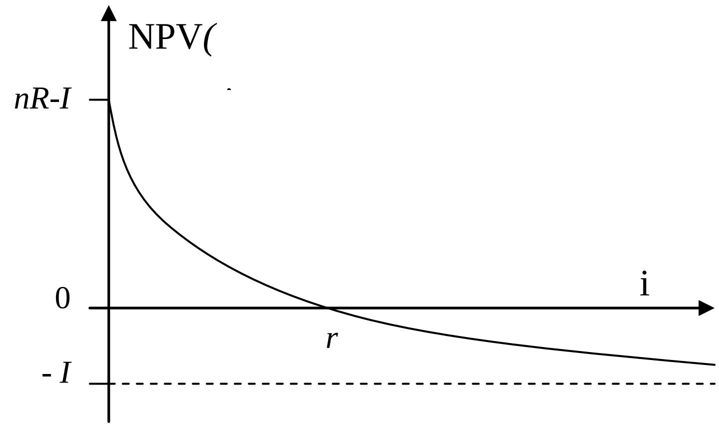


Рис. 1.7.8

С увеличением ставки дисконтирования значение показателя $NPV(i)$ уменьшается, причем в точке $i = r$, где r - значение IRR проекта, $NPV(r) = 0$. При $0 \le i < r$, как и было установлено, $NPV(i) > 0$ и $NPV(i) < 0$ если $i > r$ (см. свойство 3 показателя *IRR*, параграф 1.6). Увеличение ставки дисконтирования делает проект менее выгодным или вообще неприемлемым. И наоборот, чем меньше ставка дисконтирования $i < IRR$, тем более выгодным является проект. Таким образом, инвестор заинтересован в том, чтобы ставка дисконтирования была меньше.

2) Рассмотрим зависимость срока окупаемости n^* проекта (7.1) от ставки дисконтирования i при заданных R, n, I. Здесь n^* - точное значение срока окупаемости, удовлетворяющее определению.

Для существования срока окупаемости проекта (7.1) необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось условие (7.6). Тогда ставка дисконтирования $i < \frac{R}{I}$. Найдем все решения уравнения (7.4) для $i \in \left[0, \frac{R}{I}\right[$. Те из них, которые удовлетворяют условию $n^* \le n$, являются сроком окупаемости проекта.

Согласно определению срока окупаемости, $Ra_{n*,i} = I$. Тогда $a_{n*,i} = \frac{I}{R}$. Дифференцируем это выражение по i: $\frac{\partial a_{n^*,i}}{\partial n^*}(n^*)_i^{/} + \frac{\partial a_{n^*,i}}{\partial i} = 0$. Отсюда $(n^*)_i^{/} = -\frac{\frac{\partial a_{n^*,i}}{\partial i}}{\frac{\partial a_{n^*,i}}{\partial n^*}}$. Так как $a_{n^*,i} = \frac{1-(1+i)^{-n^*}}{i}$, то $\frac{\partial a_{n^*,i}}{\partial n^*} > 0$. С другой стороны, так как $a_{n^*,i} = \frac{1}{1+i} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^{n^*}}$, то $\frac{\partial a_{n^*,i}}{\partial i} < 0$. Следовательно, $(n^*)_i^{/} > 0$. Кроме того, $a_{n^*,i}\Big|_{i=0} = n^*\Big|_{i=0} = \frac{I}{R}$. Из (7.7) находим $\lim\limits_{i \to \frac{R}{I} - 0} n^* = +\infty$. График зависимости n^* от ставки дисконтирования i показан на рисунке:

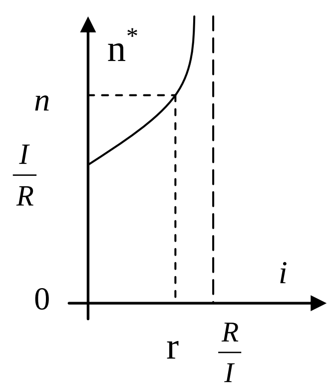


Рис. 1.7.9

Если параметры R, n, I таковы, что $I > nR$, то проект не имеет срока окупаемости, так как все значения $n^* > n$. Если же R, n, I удовлетворяют условию $I < nR$, проект имеет срок окупаемости. В этом случае существуют значения $n^* \le n$. Одновременно условие $I < nR$ означает положительное значение показателя IRR проекта. С увеличением ставки дисконтирования i срок окупаемости проекта растет. При $i = r$, где r - значение показателя IRR проекта, срок окупаемости $n^* = n$ (см. свойство 2 срока окупаемости, параграф 1.6). Срок окупаемости имеют те проекты, для которых $i \le r$, так как для этих проектов $n^* \le n$. Значениям ставки дисконтирования $i > r$ соответствуют $n^* > n$. Это означает то, что при $i > r$ проект не имеет срока окупаемости. Этот результат соответствует свойству 5 DPP (параграф 1.6).

Как уже отмечалось, в ходе реализации проекта ставка дисконтирования может измениться. При увеличении i срок окупаемости проекта может превысить ограничение по этому показателю, если оно существует, и проект может оказаться неприемлем. В примере 6.5 уже рассматривалось влияние увеличения ставки дисконтирования на оценку проекта. Увеличение ставки дисконтирования на 1 % привело к тому, что проект стал убыточным и перестал иметь срок окупаемости.

3) Для проекта (7.1) рассмотрим зависимость показателя PI от ставки дисконтирования i при заданных R, n, I.

Согласно определению индекса доходности, для проекта (7.1) значение показателя PI равно:

$$d = \frac{Ra_{n,i}}{I}\ .$$

При заданных значениях R, n, I зависимость показателя PI от ставки дисконтирования i определяется зависимостью коэффициента дисконтирования годовой ренты $a_{n,i}$ от i (рассмотрена в параграфе 1.5). Имеем:

$$d_i^{/} < 0,\ d_{ii}^{//} > 0,\ d\Big|_{i=0} = \frac{Rn}{I} > 1,\ \lim_{i\to\infty} d = 0\ .$$

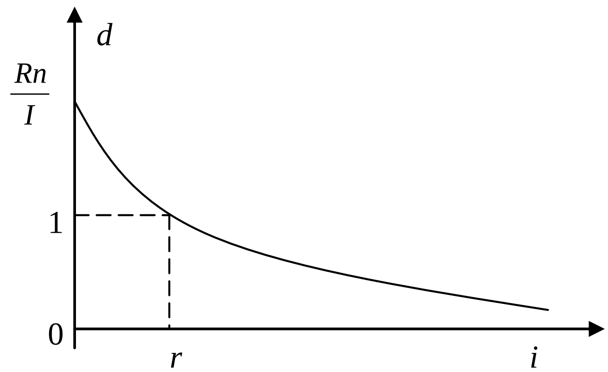


Рис. 1.7.10

С увеличением ставки дисконтирования i индекс доходности проекта уменьшается. При $i = r$, где r - значение показателя *IRR* проекта, индекс доходности $d = 1$ (см. свойство 2 индекса доходности, параграф 1.6). Если $i < r$, то $d > 1$ – проект прибыльный; значениям $i > r$ соответствуют $d < 1$, что означает убыточность проекта. Эта зависимость согласуется с ранее установленной зависимостью $NPV(i)$ от i (рис. 22).

Пример 7.2. Рассмотрим влияние ставки дисконтирования на показатели эффективности проекта A(-100,-20,20,20,80,50,10,20) из примера 7.1. Его показатель IRR = 13,3%.

i	11%	11,5%	12%	12,5%	13%	13,5%
$NPV(i)$	10,2	7,9	5,6	3,5	1,3	-0,7
DPP	6 (5,95)	7 (6,14)	7 (6,34)	7 (6,56)	7 (6,78)	нет
PI	1,086	1,067	1,048	1,029	1,011	0,994

В скобках в третьей строке указаны точные значения срока окупаемости. Получены из предположения о непрерывном и равномерном поступлении дохода в течение того года, когда сумма $\Sigma R_k/(1+i)^k$ изменяет знак, с постоянной годовой интенсивностью, равной величине платежа за этот год. Например, во 2-м - 4-м столбцах точное значение n^* найдено из уравнения $NPV_{n^*}(i) = 0$ (см. свойство 3 *DPP*), или

$$\sum_{k=0}^{6}\frac{R_k}{(1+i)^k}+\int_6^{n^*}\frac{20}{(1+i)^t}dt = \sum_{k=0}^{6}\frac{R_k}{(1+i)^k}+\frac{20}{\ln(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^6}-\frac{1}{(1+i)^{n^*}}\right] = 0.$$

Итак, зависимость показателей эффективности от ставки дисконтирования i следующая: $NPV(i)$, PI – убывающие функции, DPP – возрастающая функция i. Следовательно, при возрастании i все показатели указывают на снижение эффективности проекта. В отношении показателя IRR можно сказать, что при этом уменьшается резерв безопасности проекта, характеризуемый величиной $IRR - i$. Значит, ставку дисконтирования желательно минимизировать, особенно в случае, если проект финансируется за счет заемных средств.

Взаимосвязь показателей эффективности.

Зависимость показателей эффективности от *IRR* проекта установим при заданных R, n, i.

1) Установим зависимость показателя $NPV(i)$ от IRR. Изменяя инвестиции в проект I, тем самым изменяем показатель IRR проекта (см. зависимость IRR от I).

Имеем: $NPV(i) = Ra_{n,i} - I$, $NPV(r) = Ra_{n,r} - I = 0$. Тогда $NPV(i) = Ra_{n,i} - Ra_{n,r}$, где коэффициент дисконтирования ренты $a_{n,r} = \frac{1}{1+r}+\ldots+\frac{1}{(1+r)^n}$. Тогда $\left(NPV(i)\right)'_r > 0$, $\left(NPV(i)\right)''_{rr} < 0$. Значит, $NPV(i)$ – возрастающая вогнутая функция r на множестве $]-1,+\infty[$, причем $\lim\limits_{r\to -1+0} NPV(i) = -\infty$; $NPV(i)\Big|_{r=0} = Ra_{n,i} - Rn < 0$; $\lim\limits_{r\to\infty} NPV(i) = Ra_{n,i} > 0$. График зависимости $NPV(i)$ от r показан на рисунке:

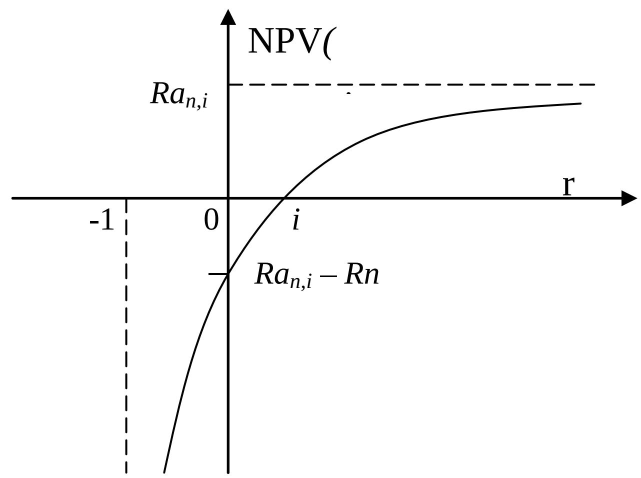


Рис. 1.7.11

Чем больше внутренняя норма доходности проекта r, тем больше его $NPV(i)$. Отрицательные значения r соответствуют тому, что условие $I < nR$ не выполняется, т.е. проект заведомо убыточен. $NPV(i) < 0$ если $r < i$ и $NPV(i) > 0$ при $r > i$, что соответствует свойству 3 показателя *IRR*, параграф 1.6. Когда r принимает значение ставки дисконтирования i, тогда $NPV(r = i) = = 0$. Таким образом, чем больше *IRR*, тем более прибыльным является проект.

Замечание. Уточнить самостоятельно анализ зависимости $NPV(i)$ от r и рисунок, если предположить, что $I < \frac{R}{i}$.

2) Рассмотрим зависимость срока окупаемости n^* проекта (7.1) от его внутренней нормы доходности r при заданных R, n, i. Изменяя инвестиции I в проект, тем самым изменяем показатель *IRR* проекта.

Для существования срока окупаемости проекта (7.1) необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось условие (7.6). Следовательно, инвестиции I в проект таковы, что $I < \frac{R}{i}$. Отсюда, так как $I = Ra_{n,r}$, то $1 - ia_{n,r} > 0$. Это неравенство справедливо для значений r таких, что $a_{n,r} < \frac{1}{i}$. Это значит, что

$r \in]r_0, +\infty[$, где r_0 - решение уравнения $\frac{1}{i} = \frac{1-(1+x)^{-n}}{x}$. Можно показать, что если $in < 1$, то $r_0 < 0$, а если $in > 1$, то $r_0 > 0$, причем $r_0 < i$. Найдем все решения уравнения (7.4) для $r \in]r_0, +\infty[$. Те из них, которые удовлетворяют условию $n^* \le n$, являются сроком окупаемости проекта.

Согласно определению срока окупаемости проекта и внутренней нормы доходности, $Ra_{n*,i} = I = Ra_{n,r}$. Отсюда $a_{n,r} = a_{n*,i}$, где $a_{n^*,i} = \frac{1-(1+i)^{-n^*}}{i}$. Тогда

$$n* = \frac{-\ln(1 - ia_{n,r})}{\ln(1+i)}.$$

Дифференцируем это выражение по r. Так как $a_{n,r} = \frac{1}{1+r} + ... + \frac{1}{(1+r)^n}$, то $(a_{n,r})'_r < 0$, $(a_{n,r})''_{rr} > 0$. Тогда $(n^*)'_r < 0$, $(n^*)''_{rr} > 0$. Значит, $n^*(r)$ – убывающая выпуклая функция на множестве $]r_0, +\infty[$. Если $a_{n,r} \to \frac{1}{i}$, то $n^* \to +\infty$. При этом, $r \to r_0$. Так как $\lim\limits_{r\to\infty} a_{n,r} = 0$, то $\lim\limits_{r\to\infty} n^* = 0$. В случае, когда $r_0 < 0$, т.е. $in < 1$, можно найти значение n^* при $r = 0$. Действительно, так как $a_{n,r}\Big|_{r=0} = n$, то $n*\Big|_{r=0} = \frac{-\ln(1-in)}{\ln(1+i)} > n$.

График зависимости $n^*(r)$ показан на рисунке, где использовано обозначение $\tilde{n} = \frac{-\ln(1-in)}{\ln(1+i)}$:

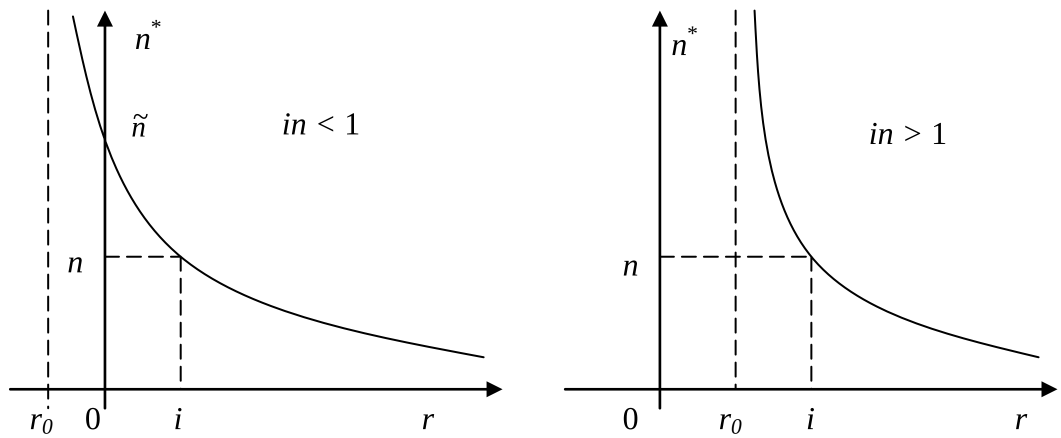


Рис. 1.7.12

Значения $n^* \le n$ являются сроком окупаемости проекта. С увеличением внутренней нормы доходности r срок окупаемости проекта уменьшается. При $r = i$, где i – ставка дисконтирования проекта, срок окупаемости $n^* = n$, где n – срок проекта (см. свойство 2 срока окупаемости, параграф 1.6). При $r < i$ проект не имеет срока окупаемости, так как этим значениям r соответствуют $n^* > n$. При $r > i$ срок окупаемости $n^* < n$. Условие $a_{n,r} \to \frac{1}{i}$ означает, что инвестиции в проект приближаются к значению стоимости вечной ренты, т.е. $I \to \frac{R}{i}$. Срок окупаемости такого проекта $n^* \to +\infty$.

Пример 7.3. Расчет $n^*(r)$, где $r > r_0$, приведен в таблицах для $in < 1$ и $in > 1$.

$in < 1$ (i = 5%, n = 3, r_0 = - 56,7%)

r	-50%	-30%	-10%	-0,1%	0,0%	5%	10%	50%
$a_{n,r}$	14,00	6,385	3,717	3,006	3,331	2,723	2,487	1,407
n *	24,677	7,882	4,215	3,338	$\tilde{n}$ =3,734	n =3,000	2,721	1,496

$in > 1$ (i = 35 %, n = 3, r_0 = 2,47%)

r	2,48%	3%	10%	20%	35%	40%	50%
$a_{n,r}$	2,86	2,829	2,487	2,106	1,696	1,589	1,4074074
n *	40,8458	15,350	6,809	4,454	n =3,000	2,706	2,2607

3) Рассмотрим зависимость индекса доходности d от внутренней нормы доходности r проекта при заданных R, n, i. Изменяя инвестиции в проект I, тем самым изменяем показатель *IRR* проекта.

Согласно определению индекса доходности и внутренней нормы доходности, имеем: $d = \dfrac{Ra_{n,i}}{I}$, $I = Ra_{n,r} = R\left(\dfrac{1}{1+r} + \ldots + \dfrac{1}{(1+r)^n}\right)$. Так как $I_r^{/} < 0$, то $d_r^{/} = -\dfrac{Ra_{n,i}}{I^2} I_r^{/} > 0$, где $r \in]-1, +\infty[$. Кроме того, так как $\lim\limits_{r \to -1} I = +\infty$, то $\lim\limits_{r \to -1} d = 0$. Так как $I\Big|_{r=0} = nR$, то $d\Big|_{r=0} = \dfrac{a_{n,i}}{n} < 1$. Так как $I \to 0$ при $r \to \infty$, то $\lim\limits_{r \to \infty} d = +\infty$. Характер зависимости $d(r)$ показан на рисунке:

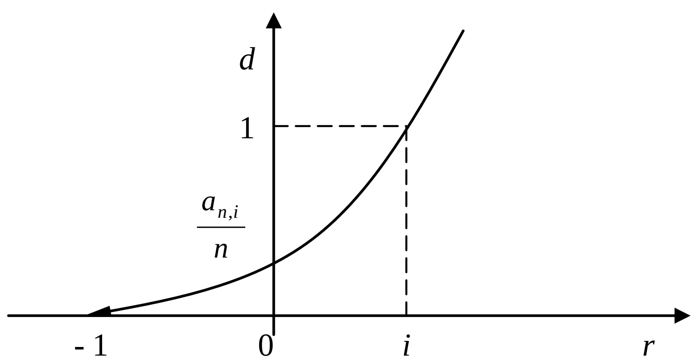


Рис. 1.7.13

Чем больше внутренняя норма доходности r проекта, тем больше его индекс доходности d, т.е. эффективность вложений. При $r = i$, где i – ставка дисконтирования проекта, $d = 1$. Если $r < i$, то $d < 1$ – проект не окупается. При $r > i$ значения $d > 1$ – инвестиции эффективны.

Пример 7.4. Рассмотрим проекты

$$A(-90,\ 50,\ \ 50),$$

$$B(-100,\ 50,\ 50),$$

$$C(-110,\ 50,\ 50).$$

Так как для проекта А выполняется условие $I < nR$ (90<50 + 50), то внутренняя норма доходности этого проекта $r^A > 0$ и его индекс доходности $d^A > \frac{a_{n,i}}{n}$. Для проекта В имеем $I = nR$, что соответствует значениям $r^B = 0$ и $d^B = \frac{a_{n,i}}{n} < 1$. Для проекта С выполняется условие $I > nR$, что означает заведомую убыточность проекта, $r^C < 0$ и значение индекса доходности $d^C < d^B < 1$.

Замечание. Уточнить самостоятельно анализ зависимости $d(r)$ и рисунок, если предположить, что $I < \frac{R}{i}$.

Итак, зависимость показателей эффективности от внутренней нормы доходности *IRR* проекта можно охарактеризовать следующим образом: $NPV(i)$, *PI* – возрастающие функции r, срок окупаемости *DPP* – убывающая функция r. Следовательно, при увеличении *IRR* проекта все показатели указывают на возрастание эффективности проекта, включая сам показатель *IRR*, что снова означает согласованность показателей в оценке проекта.

Зависимость показателей эффективности от $NPV(i)$ проекта установим при заданных R, n, i.

1) Рассмотрим зависимость срока окупаемости n^* проекта (7.1) от его $NPV(i)$. Изменяя инвестиции I в проект, тем самым изменяем показатель $NPV(i)$ проекта.

Для существования срока окупаемости проекта (7.1) необходимо (но недостаточно), чтобы выполнялось условие (7.6). Значит, инвестиции I в проект таковы, что $I < \frac{R}{i}$. Следовательно, показатель $NPV(i) = Ra_{n,i} - I$ будем рассматривать для значений $I \in \left]0, \frac{R}{i}\right[$. Тогда $NPV(i) \in \left]Ra_{n,i} - \frac{R}{i}; Ra_{n,i}\right[$. Учитывая равенство (7.4), имеем $NPV(i) = Ra_{n,i} - I = Ra_{n,i} - Ra_{n*,i} = Ra_{n,i} - R\frac{1-(1+i)^{-n^*}}{i}$. Отсюда несложно установить, что $n^*(NPV(i))$ - убывающая выпуклая функция, характер зависимости которой имеет вид:

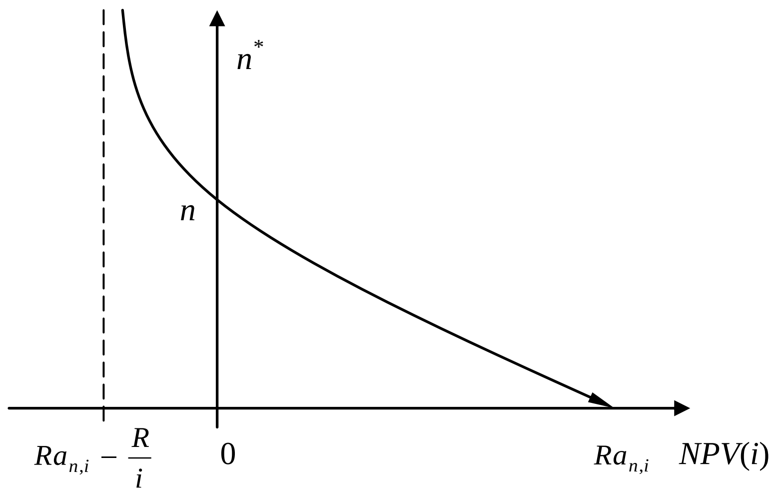


Рис. 1.7.14

Значения $n^* \le n$ являются сроком окупаемости проекта. Заметим, что $n^* \le n$ когда $NPV(i) \ge 0$, что соответствует свойству 4 *DPP*. С увеличением $NPV(i)$ срок окупаемости проекта уменьшается. На этом рисунке значению $n^* = n$, где n – срок проекта, соответствует $NPV(i) = 0$. Проекты с $NPV(i) < 0$ не имеют срока окупаемости, что подтверждает свойство 4 *DPP*, параграф 1.6.

2) Рассмотрим зависимость индекса доходности d проекта (7.1) от его $NPV(i)$ при заданных R, n, i. Изменяя инвестиции I в проект, тем самым изменяем показатель $NPV(i)$ проекта.

Имеем: $d = \frac{Ra_{n,i}}{I} = \frac{Ra_{n,i}}{Ra_{n,i} - NPV(i)}$, где в общем случае $NPV(i) \in \left]-\infty, Ra_{n,i}\right[$.

Характер зависимости $d(NPV(i))$ имеет вид:

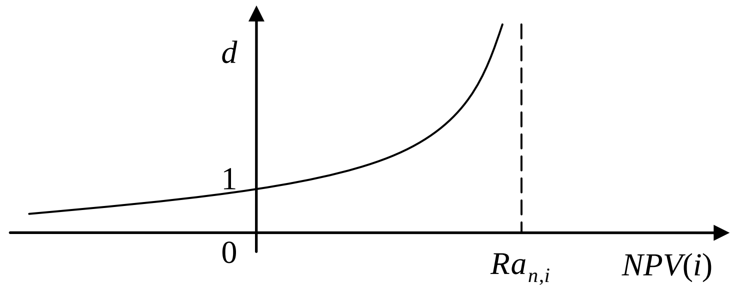


Рис. 1.7.15

С увеличением показателя $NPV(i)$ проекта его индекс доходности растет. Значения индекса доходности $d > 1$ имеют проекты с $NPV(i) > 0$, что подтверждает свойство 4 показателя PI, параграф 1.6.

Замечание. Уточнить самостоятельно анализ зависимости $d(NPV(i))$ и рисунок, если предположить, что $I < \frac{R}{i}$.

Таким образом, срок окупаемости уменьшается, а индекс доходности увеличивается при увеличении $NPV(i)$ проекта. С учетом ранее рассмотренной зависимости показателей $NPV(i)$ и IRR, можно утверждать, что с увеличением $NPV(i)$ все показатели, включая сам показатель $NPV(i)$, указывают на возрастание эффективности проекта.

Связь срока окупаемости n^* и индекса доходности d установим при заданных R, n, i. Изменяя инвестиции в проект I, тем самым изменяем его срок окупаемости n^* (см. зависимость DPP от I).

Согласно определению индекса доходности и срока окупаемости, имеем: $d = \frac{Ra_{n,i}}{I}$, $Ra_{n^*,i} = I$. Тогда $d = \frac{a_{n,i}}{a_{n^*,i}}$, где $a_{n^*,i} = \frac{1-(1+i)^{-n^*}}{i}$. Так как $\left(a_{n^*,i}\right)'_{n^*} > 0$, $\left(a_{n^*,i}\right)''_{n^*n^*} < 0$, то $d'_{n^*} = -\frac{a_{n,i}}{(a_{n^*,i})^2}\left(a_{n^*,i}\right)'_{n^*} < 0$,

$d^{//}_{n^*n^*} = -\,a_{n,i}\left[\dfrac{-2}{(a_{n^*,i})^3}\left((a_{n^*,i})^{/}_{n^*}\right)^2 + \dfrac{1}{(a_{n^*,i})^2}\left(a_{n^*,i}\right)^{//}_{n^*n^*}\right] > 0$. Следовательно, $d(n^*)$ – убывающая выпуклая функция на множестве $]0,+\infty[$. Так как $\lim\limits_{n^*\to\infty} a_{n^*,i} = \dfrac{1}{i}$, то $\lim\limits_{n^*\to\infty} d = ia_{n,i} = 1-(1+i)^{-n} < 1$. Так как $\lim\limits_{n^*\to 0} a_{n^*,i} = 0$, то $\lim\limits_{n^*\to 0} d = +\infty$. График зависимости $d(n^*)$ показан на рисунке:

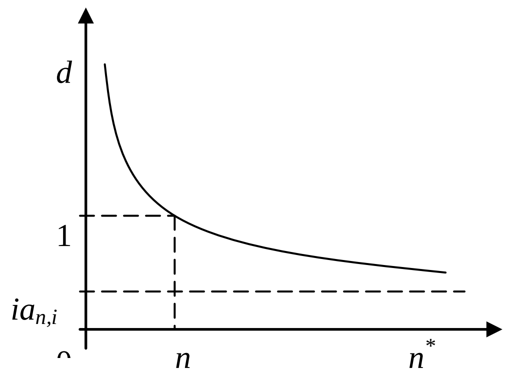


Рис. 1.7.16

Значения $n^* \le n$ являются сроком окупаемости проекта. С увеличением срока окупаемости проекта n^* его индекс доходности уменьшается, т.е. оба показателя указывают на снижение эффективности проекта (см. пример 7.1). При $n^* = n$, где n – срок проекта, $d = 1$ (свойство 3 показателя PI). Индекс доходности $d > 1$ тех проектов, которые имеют срок окупаемости $n^* < n$. И наоборот: проекты, не имеющие срока окупаемости (для этих проектов $n^* > n$), имеют $d < 1$. Таким образом, анализ зависимости $d(n^*)$ приводит к ранее полученным выводам.

Рассмотренные в этом параграфе зависимости показателей эффективности от параметров проекта и связь показателей подтверждают согласованность показателей в оценке проекта, установленную в параграфе 1.6: если какой-либо из показателей изменяется и указывает, например, на повышение эффективности проекта по этому показателю, то и остальные показатели при этом изменяются так, что проект оценивается как более эффективный и по всем остальным показателям. И наоборот: снижение эффективности проекта по одному из показателей означает точно такой же вывод в отношении остальных показателей. Очевидно, что снижение эффективности по разным показателям происходит в разной мере. Окончательная оценка проекта – за лицом, принимающим решение о финансировании проекта.

Заметим, что здесь рассматривались лишь проекты с классической схемой инвестирования – сначала расходы, затем отдача. Проекты с неординарными денежными потоками и проблемы выбора проектов для реализации среди альтернативных рассмотрены в специальной литературе, например [5, 10].

1.8. Внутренняя доходность облигации. Временная структура процентных ставок.

Анализ финансовых инвестиций в условиях определенности будем изучать на примере ценных бумаг с фиксированным доходом. Наиболее распространенным видом таких ценных бумаг являются облигации.

Облигация – это обязательство выплатить в определенные моменты времени в будущем заранее установленные денежные суммы. Основные параметры облигации – номинальная цена (номинал), дата погашения, размеры и сроки платежей по облигации. С момента эмиссии и до погашения облигации продаются и покупаются на фондовом рынке. Рыночная цена облигации устанавливается на основе спроса и предложения и может быть равна ее номиналу, выше или ниже номинала.

Будем рассматривать облигации в условиях определенности: эмитент не может отозвать облигацию до установленной даты погашения, платежи по облигации задаются фиксированными значениями в определенные моменты времени. При этом поступление будущих доходов точно в указанные сроки и в полном объеме считается гарантированным. Про такие облигации говорят, что они не имеют кредитного риска. Основным фактором риска остается процентный риск – риск изменения рыночных процентных ставок.

Рассмотрим облигацию, по которой через t_1, $t_2,\ldots, t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$, где $0 < t_1 < t_2 <\ldots< t_n$, обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2,\ldots, C_n$ соответственно. Очевидно, что $C_i > 0$, $i = 1, 2,\ldots, n$. Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент $t = 0$. Тогда естественно считать, что $P < C_1 + C_2 +\ldots+ C_n$. Момент времени $t = 0$ – это момент, в который предполагается произвести инвестицию в облигацию или момент покупки облигации. Момент времени $t = t_n$, когда выполняется последний платеж по облигации, называют моментом погашения облигации, а срок $T = t_n$ (в годах) – сроком до погашения. Два показателя в основном интересуют инвестора – доходность и цена облигации. **Внутренняя доходность** – самый важный и наиболее широко используемый показатель оценки облигации. Известен также как **доходность к погашению**.

Определение. Годовая внутренняя доходность облигации r – это годовая ставка сложных процентов, по которой современная стоимость потока платежей по облигации равна рыночной стоимости облигации в момент $t = 0$:

$$P = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}. \qquad (8.1)$$

Здесь внутренняя доходность облигации определяется как годовая доходность денежного потока $C_1, C_2,\ldots,C_n$, стоимость которого P (см. параграф 1.4).

В зарубежной практике существует рыночное соглашение, согласно которому если платежи по облигации выплачиваются через равные промежутки времени m раз в году, то для дисконтирования членов денежного потока применяется годовая номинальная ставка внутренней доходности j :

$$P = \frac{C_1}{(1+\frac{j}{m})^{t_1 m}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+\frac{j}{m})^{t_n m}}.$$

Свойства внутренней доходности облигации.

1. Ставка внутренней доходности облигации равна преобладающей рыночной процентной ставке для инвестиций в альтернативные финансовые инструменты с такой же степенью риска. Или короче – ставка внутренней доходности облигации равна доходности сравнимых с ней инструментов.

2. Годовая внутренняя доходность облигации – это ставка доходности, получаемая инвестором, если выполняются два условия:

1) инвестор владеет облигацией до момента ее погашения $t = t_n$;

2) все платежи по облигации реинвестируются по ставке, равной внутренней доходности облигации r в момент ее покупки.

Покажем, что при выполнении этих условий среднегодовая доходность инвестиции в облигацию равна ее внутренней доходности. Покупку облигации, затем владение ею до момента погашения с реинвестированием поступающих доходов будем рассматривать как финансовую операцию (см. параграф 1.2). Срок операции $T = t_n$ лет. Денежная оценка начала операции $P(0)$ – это рыночная цена покупки облигации P в момент $t = 0$. Согласно (8.1), $P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$. Денежная оценка момента погашения облигации $t = t_n$ для инвестора при выполнении условий 1), 2) – это сумма $P(t_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t_n - t_i}$. Согласно определению доходности финансовой операции (2.2):

$$P(t_n) = P(1+\bar{r})^{t_n} ,$$

где $\bar{r}$ - среднегодовая доходность инвестиции в облигацию на срок $T = t_n$ лет. Подставим в это равенство выражения для P и $P(t_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t_n - t_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} (1+\bar{r})^{t_n} .$$

Откуда получаем $r = \bar{r}$.

Таким образом, среднегодовая доходность инвестиции в облигацию, равная r, реализуется в день погашения облигации при выполнении условий 1), 2). Отсюда другое название внутренней доходности – доходность к погашению. Если пункты 1) или 2) не выполняются, то реальная доходность, получаемая инвестором, может быть выше или ниже внутренней доходности облигации. Риск, с которым сталкивается инвестор при покупке облигации, – это риск того, что будущие ставки реинвестирования будут ниже ставки внутренней доходности. Этот риск называется реинвестиционным риском, или риском ставки реинвестирования.

Внутренняя доходность облигации используется для оценки привлекательности альтернативных инструментов инвестирования. При прочих равных условиях, чем выше доходность к погашению облигаций данного выпуска, тем более привлекательным он является.

Рассмотрим задачу определения внутренней доходности облигации. Внутренняя доходность облигации – это решение уравнения (8.1). Согласно теореме 4.1, это уравнение при выполнении условия $P < C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ имеет единственное положительное решение. Это решение находят, используя приближенные методы. Один из них – метод линейной интерполяции (изложен в параграфе 1.4, примеры 4.2, 4.4).

Пример 8.1. Определить годовую внутреннюю доходность r облигации, поток платежей по которой указан в таблице:

Срок, годы	0	1	2
Платеж, д.е.	-948	50	1050

Приближенное значение внутренней доходности облигации найдем методом линейной интерполяции. Согласно определению годовой внутренней доходности облигации

$$948 = \frac{50}{(1+r)} + \frac{1050}{(1+r)^2} .$$

Необходимо найти решение уравнения $F(r) = 0$, где

$$F(r) = 948 - \frac{50}{(1+r)} - \frac{1050}{(1+r)^2} .$$

Так как 948 < 50 + 1050, то согласно теореме 4.1 существует единственное положительное решение этого уравнения. Так как $F(0{,}07) = -15{,}8396$, $F(0{,}08) = 1{,}4979$, то искомая внутренняя доходность $r \in (0{,}07; 0{,}08)$. По формуле (4.8) находим первое приближение

$$r_{л1} = 0{,}07 + \frac{-(-15{,}8396)}{1{,}4979-(-15{,}8396)}(0{,}08-0{,}07) = 0{,}079140 .$$

При этом значение функции $F(r_{л1}) = 0{,}02567 > 0$. Значит, решение $r \in (0{,}07; 0{,}07914)$. Следующий шаг метода дает

$$r_{л2} = 0{,}07 + \frac{-(-15{,}8396)}{0{,}02567-(-15{,}8396)}(0{,}079140-0{,}07) = 0{,}079125 .$$

Поэтому можно считать, что $r \approx 0{,}07913$ или 7,913 % с точностью до третьего знака после запятой.

Определение. Облигация называется чисто дисконтной, если по этой облигации производится только одна выплата.

Определение. Внутренняя доходность чисто дисконтной облигации без кредитного риска, срок до погашения которой t лет, называется годовой безрисковой процентной ставкой для инвестиций на t лет. Другое название – годовая **спот-ставка**.

Пусть A – погашаемая сумма по чисто дисконтной облигации, t лет - срок до погашения, P – рыночная цена облигации в момент $t = 0$, $r(t)$ – внутренняя доходность облигации. Тогда согласно определению внутренней доходности облигации,

$$P = \frac{A}{\left(1+r(t)\right)^t} .$$

Отсюда

$$r(t) = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \qquad (8.2)$$

– годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет.

В качестве примера чисто дисконтных облигаций, не имеющих кредитного риска, можно привести бескупонные облигации Казначейства США. Доходности казначейских бумаг служат эталоном при оценке всех видов облигаций.

Рассмотрим, как можно оценить любую облигацию, если на рынке имеются чисто дисконтные облигации. Пусть на рынке имеется облигация B без кредитного риска, по которой через t_1 , $t_2,\ldots, t_n$ лет обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2,\ldots, C_n$ соответственно. Облигацию B можно оценить, если рассматривать ее как портфель из чисто дисконтных облигаций $B_1, B_2,\ldots, B_n$ со сроками погашения через t_1 , $t_2,\ldots, t_n$ лет соответственно. Предположим, выполняются следующие условия:

1) известны годовые безрисковые процентные ставки $r(t_1), r(t_2), \ldots, r(t_n)$ для инвестиций на t_1 , $t_2,\ldots, t_n$ лет, отсчитанных от момента $t = 0$;

2) чисто дисконтные облигации $B_1, B_2,\ldots, B_n$ можно приобрести на рынке в любом количестве без трансакционных расходов. Тогда для этих облигаций имеем

$$P_i = \frac{A_i}{\left(1 + r(t_i)\right)^{t_i}} \ ,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, где P_i – текущая рыночная цена одной облигации i – го вида, A_i – погашаемая сумма по этой облигации, $r(t_i)$ - ее внутренняя доходность. Платеж C_1 от портфеля погашается облигациями B_1, платеж C_2 – облигациями B_2, и т.д., платеж C_n – облигациями B_n. Тогда в портфеле $\frac{C_i}{A_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, облигаций каждого вида. Следовательно, стоимость портфеля в момент $t = 0$ равна

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{C_i}{A_i}.$$

Тогда рыночная стоимость облигации B в момент $t = 0$ составляет

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{\left(1 + r(t_i)\right)^{t_i}}. \qquad (8.3)$$

Каждый платеж по облигации B индивидуально дисконтируется по соответствующей безрисковой процентной ставке.

Определение. Набор годовых безрисковых процентных ставок $r(t_1)$, $r(t_2)$, …, $r(t_n)$ для инвестиций на t_1, $t_2, \ldots, t_n$ лет, отсчитанных от момента $t = 0$, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, называется временной структурой процентных ставок.

Таким образом, если известна временная структура процентных ставок, то стоимость облигации, не имеющей кредитного риска, может быть рассчитана по формуле (8.3).

Определение. График функции $r = r(t)$, где $r(t)$ - годовая безрисковая процентная ставка для инвестиций на t лет, называется кривой доходностей (или кривой спот-ставок).

В условиях реального рынка всегда существует лишь конечный набор чисто дисконтных облигаций (например, не существует бескупонных долговых обязательств Казначейства США со сроком погашения больше одного года). Поэтому кривую доходностей невозможно построить только по наблюдениям на рынке. В связи с этим строят теоретическую кривую доходностей. Для этого, используя доходности реально существующих чисто дисконтных облигаций, рассчитывают теоретические значения доходностей для различных сроков инвестирования. Существует несколько методов получения теоретических значений доходностей. Один из них называется **«процедурой бутстреппа».** Рассмотрим этот метод на примере.

Пример 8.2. На рынке имеются государственные облигации A, B, C, D, E, потоки платежей по которым и цены в момент $t = 0$ указаны в таблице:

	Срок в годах					P
	0,5	1	1,5	2	2,5	
A	108					105,27
B		121				113,83
C	10	11	109			118,71
D	11	11	11	120		135,64
E	8	8	8	8	108	118,84

A и B – чисто дисконтные облигации. Их внутренние доходности $r(0{,}5) = 5{,}25$ % и $r(1) = 6{,}3$ %, определенные по формуле (8.2), являются безрисковыми процентными ставками для инвестиций на 0,5 года и 1 год. Зная эти две ставки, можно вычислить теоретическую безрисковую процентную ставку для инвестиций на 1,5 года, используя облигацию C. Цена облигации C по формуле (8.3) равна

$$118{,}71 = \frac{10}{\left(1+r(0{,}5)\right)^{0{,}5}} + \frac{11}{\left(1+r(1)\right)} + \frac{109}{\left(1+r(1{,}5)\right)^{1{,}5}},$$

где $r(0{,}5) = 0{,}0525$, $r(1) = 0{,}063$. Тогда

$$118{,}71 = \frac{10}{\left(1+0{,}0525\right)^{0{,}5}} + \frac{11}{\left(1+0{,}063\right)} + \frac{109}{\left(1+r(1{,}5)\right)^{1{,}5}}.$$

Откуда получаем теоретическую годовую безрисковую процентную ставку для инвестиций на 1,5 года: $r(1{,}5) = 6{,}9$ %. Данная ставка – это та ставка, которую предлагал бы рынок по 1,5 - годовым чисто дисконтным облигациям, если бы такие ценные бумаги существовали на самом деле.

Зная теоретическую 1,5 – годовую безрисковую процентную ставку, можно вычислить теоретическую двухлетнюю безрисковую процентную ставку, используя облигацию D:

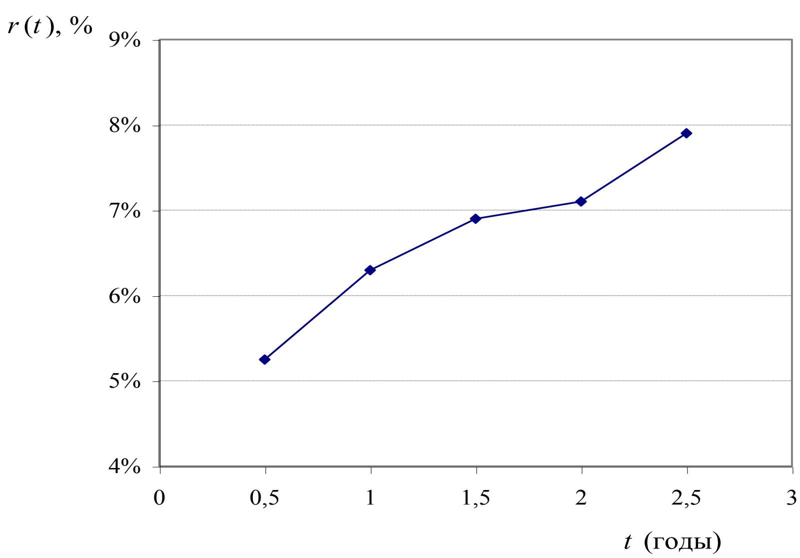
$$135{,}64 = \frac{11}{\left(1+0{,}0525\right)^{0{,}5}} + \frac{11}{\left(1+0{,}063\right)} + \frac{11}{\left(1+0{,}069\right)^{1{,}5}} + \frac{120}{\left(1+r(2)\right)^{2}}.$$

Откуда $r(2) = 7{,}1$ % - теоретическая двухлетняя безрисковая процентная ставка. Применяя еще раз описанную процедуру для облигации E, определяем теоретическую 2,5 - летнюю безрисковую процентную ставку: $r(2{,}5) = 7{,}9$ %.

Безрисковые процентные ставки $r(0{,}5)$, $r(1)$, $r(1{,}5)$, $r(2)$, $r(2{,}5)$, построенные с помощью такого процесса, задают временную структуру процентных ставок по 2,5 - летнему диапазону относительно момента времени, к которому относятся цены облигаций.

Зная временную структуру процентных ставок $r(t_1)$, $r(t_2)$, …, $r(t_n)$, можно построить кривую доходностей. Один из методов построения кривой – линейное интерполирование. Полагают

$$r(t) \approx r(t_i)\frac{t_{i+1}-t}{t_{i+1}-t_i} + r(t_{i+1})\frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \; i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (8.4)$$



Кривая доходностей для временной структуры, полученной в примере 8.2, при использовании линейного интерполирования имеет вид:

Рис. 1.8.1

Пользуясь кривой доходностей, можно определить приближенное значение безрисковой процентной ставки для инвестиций на любой срок от t_1 до t_n лет. Например, так как $1{,}25 \in [1;1{,}5]$, то

$$r(1{,}25) \approx r(1)\,\frac{1{,}5-1{,}25}{1{,}5-1} + r(1{,}5)\,\frac{1{,}25-1}{1{,}5-1} = 0{,}066.$$

Другой способ построения кривой доходностей – интерполирование $(n-1)$ – го порядка:

$$r(t) \approx r(t_1)\frac{(t-t_2)(t-t_3)\ldots(t-t_n)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\ldots(t_1-t_n)} +$$

$$+\ r(t_2)\frac{(t-t_1)(t-t_3)\ldots(t-t_n)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\ldots(t_2-t_n)} + \qquad (8.5)$$

…………………..

$$+\ r(t_n)\frac{(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_{n-1})}{(t_n-t_1)(t_n-t_2)\ldots(t_n-t_{n-1})}\ ,$$

где $t \in [t_1, t_n]$. Тогда $r(t)$ – многочлен степени $(n-1)$ относительно переменной t. При $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$ значения многочлена совпадают с $r(t_1), r(t_2), \ldots, r(t_n)$ соответственно. Уравнение кривой доходностей для временной структуры, полученной в примере 8.2, имеет вид:

$$r(t) \approx 0{,}00633\, t^4 - 0{,}031\, t^3 + 0{,}04442\, t^2 - 0{,}00325\, t + 0{,}0465, \text{ где } t \in [0{,}5;\ 2{,}5].$$

Пользуясь полученной кривой, вычислим стоимость облигации без кредитного риска, платежи по которой относительно момента $t = 0$ указаны в таблице:

Срок, годы	0,7	1,7
Платеж, д.е.	10	115

Рыночная стоимость данной облигации в момент $t = 0$ составляет, согласно (8.3):

$$P = \frac{10}{\left(1 + r(0{,}7)\right)^{0{,}7}} + \frac{115}{\left(1 + r(1{,}7)\right)^{1{,}7}} \ .$$

Приближенные значения годовых безрисковых процентных ставок для инвестиций на 0,7 года и 1,7 года равны соответственно:

$r(0{,}7) \approx 0{,}00633 \cdot (0{,}7)^4 - 0{,}031 \cdot (0{,}7)^3 + 0{,}04442 \cdot (0{,}7)^2 - 0{,}00325 \cdot 0{,}7 + 0{,}0465 =$ 0,0569,

$r(1{,}7) \approx 0{,}00633 \cdot (1{,}7)^4 - 0{,}031 \cdot (1{,}7)^3 + 0{,}04442 \cdot (1{,}7)^2 - 0{,}00325 \cdot 1{,}7 + 0{,}0465 =$ 0,0699.

Тогда рыночная стоимость данной облигации

$$P = \frac{10}{\left(1 + 0{,}0569\right)^{0{,}7}} + \frac{115}{\left(1 + 0{,}0699\right)^{1{,}7}} = 112{,}14.$$

Рассмотренная «процедура бутстреппа» получения теоретических значений безрисковых процентных ставок может быть использована, если на рынке имеются подходящие для этой процедуры облигации. Рассмотрим еще один метод получения теоретических значений процентных ставок.

Предположим, известна временная структура процентных ставок $r(t_1)$, $r(t_2)$, …, $r(t_k)$ для инвестиций на t_1 , t_2,…, t_k лет, а на рынке имеется облигация без кредитного риска стоимостью P, по которой через t_1 , t_2,…, t_k, t_{k+1}, …, t_n лет обещаны выплаты C_1, C_2,…, C_k, C_{k+1},…, C_n соответственно. Приближенные значения безрисковых процентных ставок $r(t_{k+1})$, $r(t_{k+2})$, …, $r(t_n)$ можно найти, используя линейную интерполяцию на отрезке $[t_k, t_n]$. Для этого полагают $r(t_n) = r$. Безрисковая процентная ставка $r(t_k)$ известна. Тогда

$$r(t_{k+1}) \approx r(t_k)\frac{t_n - t_{k+1}}{t_n - t_k} + r\,\frac{t_{k+1} - t_k}{t_n - t_k} \ ,$$

$$r(t_{k+2}) \approx r(t_k)\frac{t_n - t_{k+2}}{t_n - t_k} + r\,\frac{t_{k+2} - t_k}{t_n - t_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8.6)$$

$$r(t_{n-1}) \approx r(t_k)\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n - t_k} + r\,\frac{t_{n-1} - t_k}{t_n - t_k},$$

$$r(t_n) = r,$$

где $t_{k+1},\ t_{k+2}, \ldots, t_{n-1} \in [t_k, t_n]$.

Так как стоимость облигации P в момент $t = 0$ известна, то

$$P = \sum_{i=1}^{k}\frac{C_i}{\left(1+r(t_i)\right)^{t_i}} + \frac{C_{k+1}}{\left(1+r(t_{k+1})\right)^{t_{k+1}}} + \frac{C_{k+2}}{\left(1+r(t_{k+2})\right)^{t_{k+2}}} + \ldots + \frac{C_n}{\left(1+r(t_n)\right)^{t_n}}. \quad (8.7)$$

Подставляя в это выражение вместо $r(t_{k+1}), r(t_{k+2}), \ldots, r(t_n)$ равенства (8.6), получим уравнение с одним неизвестным r. Решение этого уравнения находим методом линейной интерполяции. Зная r, по формулам (8.6) находим безрисковые процентные ставки $r(t_{k+1}), r(t_{k+2}), \ldots, r(t_n)$. Таким образом, имеем временную структуру процентных ставок $r(t_1), r(t_2), \ldots, r(t_k), r(t_{k+1}),\ldots, r(t_n)$ по t_n – летнему диапазону относительно момента $t = 0$.

Пример 8.3. Используя линейное интерполирование, построить кривую доходностей, если известны годовые безрисковые процентные ставки:

$$r(0{,}5) = 0{,}06;\ \ r(1) = 0{,}07;\ \ r(1{,}5) = 0{,}08$$

и дана облигация (без кредитного риска) со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Платеж, д.е.	-100	5	5	5	5	105

Уравнение (8.7) для данной облигации имеет вид:

$$100=\frac{5}{(1+0{,}06)^{0{,}5}}+\frac{5}{(1+0{,}07)}+\frac{5}{(1+0{,}08)^{1{,}5}}+\frac{5}{(1+r(2))^{2}}+\frac{105}{(1+r(2{,}5))^{2{,}5}}.$$

Используем линейное интерполирование на отрезке [1,5; 2,5]. Так как $r(1{,}5)$ = 0,08, $r(2{,}5) = r$, то $r(2) \approx 0{,}08\frac{2{,}5-2}{2{,}5-1{,}5} + r\frac{2-1{,}5}{2{,}5-1{,}5}$ = 0,04 + 0,5 r. Тогда достаточно решить уравнение

$$86{,}01581 = \frac{5}{(1+0{,}04+0{,}5r)^2}+\frac{105}{(1+r)^{2{,}5}}.$$

Решая это уравнение методом линейной интерполяции, найдем $r \approx$ 0,10489.

Следовательно, $r(2) \approx$ 0,04 + 0,5 r = 0,09245, $r(2{,}5) \approx 0{,}10489$. Таким образом, по заданным $r(0{,}5)$ = 0,06; $r(1)$ = 0,07; $r(1{,}5)$ = 0,08 и вычисленным $r(2) \approx 0{,}092$; $r(2{,}5) \approx 0{,}105$ значениям безрисковых процентных ставок можно построить кривую доходностей:

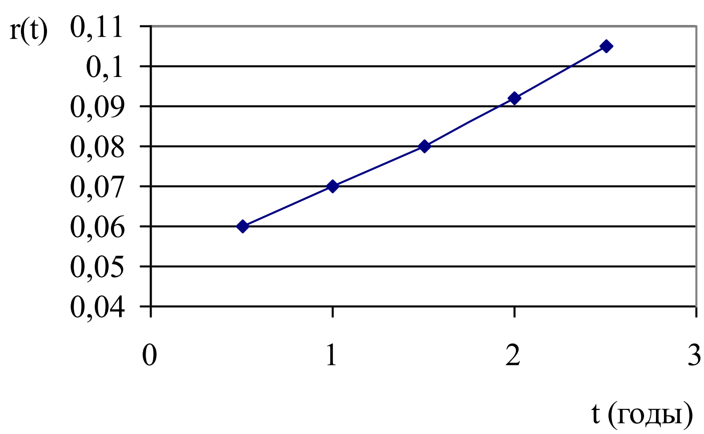


Рис. 1.8.2

Кривая доходностей, полученная для облигаций, не имеющих кредитного риска, используется также для оценки рискованных инструментов на рынке. Теоретические значения безрисковых процентных ставок с добавлением премии за риск используются для оценки всех видов облигаций. Кроме того, форма кривой доходностей рассматривается как отображение вероятного направления будущих изменений процентных ставок денежного рынка. На рис. 1.8.3 показаны четыре основные формы кривой доходностей: 1 – нормальная (возрастающая) кривая; 2 – обратная (убывающая) кривая; 3 – «горбатая» кривая; 4 – плоская (горизонтальная) кривая.

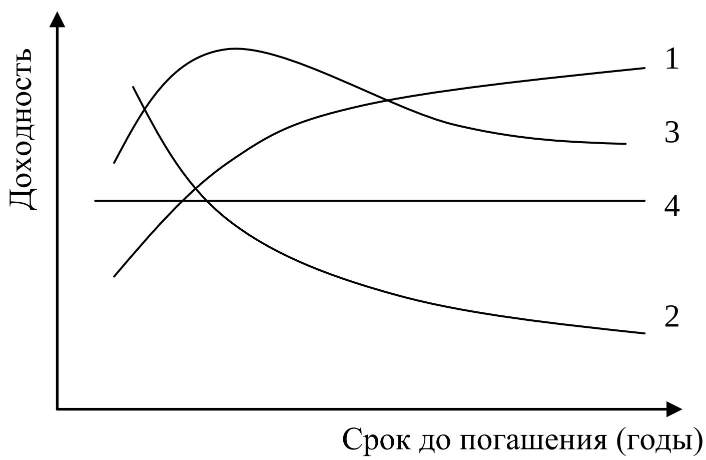


Рис. 1.8.3

Есть две основные теории, объясняющие форму кривых доходностей, – теория ожиданий и теория сегментации рынка [13, 14]. Возрастающая кривая чаще всего означает предполагаемый рост темпа инфляции. Убывающая кривая чаще всего свидетельствует об ожидаемом снижении темпа инфляции. Горизонтальная кривая доходностей означает, что годовые безрисковые процентные ставки для инвестиций на все сроки одинаковы. Горизонтальная кривая используется при изучении ряда важнейших понятий теории финансовых инвестиций с фиксированным доходом. Например таких, как дюрация и показатель выпуклости облигации, стоимость инвестиции в облигацию, иммунизация портфеля облигаций.

1.9. Купонная облигация. Зависимость цены облигации от внутренней доходности, купонной ставки, срока до погашения.

Облигация называется **купонной**, если по этой облигации производятся регулярные выплаты фиксированного процента от номинала, называемые купонными, и выплата номинала при погашении облигации. Последний купонный платеж производится в день погашения облигации.

Будем использовать следующие обозначения:

A - номинал облигации;

f - годовая купонная ставка;

m - число купонных платежей в году;

q - сумма отдельного купонного платежа;

$t = 0$ – момент покупки облигации или момент, когда предполагается инвестирование в облигацию;

T (в годах) - срок до погашения облигации от момента $t = 0$;

τ - время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации (до момента $t = 0$).

Период времени $\frac{1}{m}$, измеряемый в годах, называется **купонным периодом**. В конце каждого купонного периода производится купонный платеж. Так как облигация может быть куплена в любой момент между купонными выплатами, то τ изменяется в пределах от 0 до $\frac{1}{m}$. Если облигация куплена сразу после купонной выплаты, то $\tau = 0$. $\tau = \frac{1}{m}$ означает покупку облигации непосредственно перед купонным платежом. Так как покупка облигации производится только после оплаты очередного купона, то τ не принимает значение $\frac{1}{m}$. Таким образом, $0 \le \tau < \frac{1}{m}$. Если облигация продается через время τ после купонной выплаты, а до погашения остается n купонных платежей, то срок до погашения облигации равен

$$T = \frac{n}{m} - \tau .$$

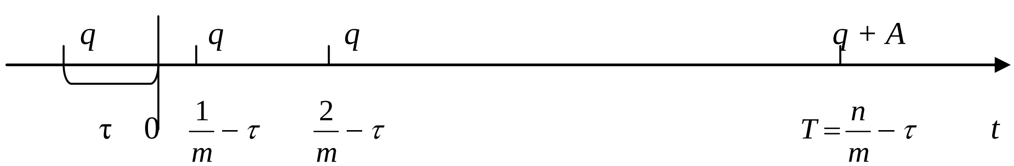


Рис. 1.9.1

Тогда $0 \le \frac{n}{m} - T < \frac{1}{m}$. Отсюда $Tm \le n < Tm + 1$, где n – целое неотрицательное число. Следовательно,

если $T\,m$ – целое, то $n = T\,m$ и $\tau = 0$;

если $T\,m$ – не целое, то $n = [T\,m] + 1$ и $\tau = \dfrac{n}{m} - T$.

Пример 9.1. По облигации производятся купонные выплаты каждые три месяца. Срок до погашения облигации а) 10,5 месяцев; б) 6 месяцев. Определить число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, а также время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

а) Число купонных платежей в году $m = 4$. Срок до погашения облигации (в годах) равен $T = \dfrac{10{,}5}{12}$. Так как $Tm = 3{,}5$ – не является целым, то число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, $n = [3{,}5] + 1 = 4$. Время, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации, равно $\tau = \dfrac{n}{m} - T = \dfrac{4}{4} - \dfrac{10{,}5}{12} = 0{,}125$ года. Значит, облигация куплена через 1,5 месяца после купонной выплаты.

б) Число купонных платежей в году $m = 4$. Срок до погашения облигации $T = \dfrac{6}{12} = 0{,}5$ года. Так как $T\,m = 2$ – является целым, то $n = T\,m = 2$. Тогда $\tau = 0$. Действительно, $\tau = \dfrac{n}{m} - T = \dfrac{2}{4} - 0{,}5 = 0$. Значит, облигация куплена сразу после купонной выплаты.

Пусть P – рыночная стоимость облигации в момент $t = 0$, купоны по которой выплачиваются m раз в год. Предположим, облигация продается через время τ после купонной выплаты, когда до погашения остается n купонных выплат. Формула (8.1) для купонной облигации имеет вид:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{m} - \tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m} - \tau}} \qquad (9.1)$$

или

$$P = \left(1+r\right)^{\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{\left(1+r\right)^{\frac{i}{m}}} + \frac{A}{\left(1+r\right)^{\frac{n}{m}}} .$$

Годовая внутренняя доходность r купонной облигации может быть определена из равенства (9.1). Так как обычно величина r мала, то

$$\left(1+r\right)^{\frac{1}{m}} \approx 1+\frac{r}{m} .$$

Тогда последнее равенство можно переписать в виде:

$$P = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m} \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{i}} + \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}} .$$

Вычислив сумму n членов геометрической прогрессии и учитывая, что $q = \frac{1}{m} f A$, получим еще одну формулу для расчета внутренней доходности купонной облигации:

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m} \left[\frac{f}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right) + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}} \right]. \qquad (9.2)$$

Для приблизительной оценки внутренней доходности купонной облигации пользуются «купеческой» формулой:

$$r = \frac{Af + \frac{A-P}{T}}{\frac{A+P}{2}} . \qquad (9.3)$$

Пример 9.2. По 9 % - й купонной облигации номиналом 1000 д.е. обещают производить каждые полгода купонные выплаты. Требуется определить внутреннюю доходность облигации, если ее стоимость равна 1050 д.е., а до погашения остается 3,8 года.

Здесь значения параметров облигации следующие: $A = 1000$ д.е., $f = 0{,}09$, $m = 2$, $q = \frac{1}{m} f A = 45$ д.е., $T = 3{,}8$ года, $P = 1050$ д.е. Найдем число купонных платежей n, оставшихся до погашения облигации, а также время τ, прошедшее от последней перед продажей облигации купонной выплаты до покупки облигации.

Так как произведение $Tm = 7{,}6$ – не является целым, то $n = [7{,}6] + 1 = 8$. Тогда $\tau = \frac{n}{m} - T = \frac{8}{2} - 3{,}8 = 0{,}2$ года.

Для расчета внутренней доходности облигации по формуле (9.2) необходимо решить уравнение

$$1050 = 1000\left(1+\frac{r}{2}\right)^{0{,}4}\left[\frac{0{,}09}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{8}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{8}}\right].$$

Методом линейной интерполяции находим $r \approx 8{,}004\%$.

Приблизительную оценку внутренней доходности облигации получим по «купеческой» формуле (9.3):

$$r = \frac{1000 \cdot 0{,}09 + \frac{1000-1050}{3{,}8}}{\frac{1000+1050}{2}} = 7{,}5\%.$$

Рассмотрим факторы, влияющие на цену купонной облигации.

Зависимость цены купонной облигации от внутренней доходности. Цену купонной облигации в момент $t = 0$ будем рассматривать как функцию ее внутренней доходности r. Используем обозначение $P(r)$.

Теорема 9.1. Функция $P(r)$ является убывающей и выпуклой.

Доказательство. Согласно (9.1),

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{(1+r)^{\frac{i}{m} - \tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m} - \tau}} .$$

Функция $P(r)$ непрерывна и дифференцируема на множестве $[0, +\infty[$. Так как

$$P(r)_r^{/} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{q\left(\frac{i}{m} - \tau\right)}{(1+r)^{\frac{i}{m} - \tau + 1}} - \frac{A\left(\frac{n}{m} - \tau\right)}{(1+r)^{\frac{n}{m} - \tau + 1}} < 0 ,$$

$$P(r)_{rr}^{//} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q\left(\frac{i}{m} - \tau\right)\left(\frac{i}{m} - \tau + 1\right)}{(1+r)^{\frac{i}{m} - \tau + 2}} + \frac{A\left(\frac{n}{m} - \tau\right)\left(\frac{n}{m} - \tau + 1\right)}{(1+r)^{\frac{n}{m} - \tau + 2}} > 0 ,$$

то $P(r)$ – убывающая выпуклая функция на множестве $[0, +\infty[$. Кроме того, $P(r = 0) = qn + A$, $\lim\limits_{r \to +\infty} P(r) = 0$. График функции $P(r)$ имеет вид:

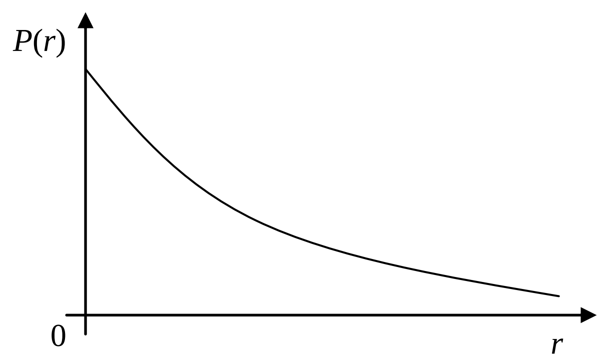


Рис. 1.9.2

Уменьшение внутренней доходности облигации вызывает рост ее цены. И наоборот: увеличение внутренней доходности облигации вызывает падение ее цены. В этом состоит фундаментальное свойство облигации – ее цена изменяется в направлении, противоположном направлению изменения ее доходности. Заметим, что зависимость $P(r)$ устанавливается для заданного момента времени.

Зависимость цены купонной облигации от купонной ставки. Рассмотрим облигацию номиналом A, купонные выплаты по которой производятся m раз в году по годовой купонной ставке f. Пусть P – цена облигации сразу после купонной выплаты ($\tau = 0$), r - ее годовая внутренняя доходность в этот момент времени. Цену облигации сразу после купонной выплаты называют **котируемой**.

Если $P = A$, то говорят, что облигация продается **по номиналу**.

Если $P > A$, то говорят, что облигация продается **с премией П = *P* –*A*.**

Если $P < A$, то говорят, что облигация продается **с дисконтом Д = *A*– *P*.**

Подчеркнем, что понятия премии и дисконта определены только для котируемой цены облигации, т.е. соответствуют значению $\tau = 0$.

Теорема 9.2. Купонная облигация продается сразу после купонной выплаты по номиналу, с премией, с дисконтом тогда и только тогда, когда $f = r$, $f > r$, $f < r$ соответственно.

Доказательство. По условию $\tau = 0$. Тогда по формуле (9.2) **котируемая** цена облигации равна:

$$P = A\left[\frac{f}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right].$$

Рассмотрим разность

$$P - A = A\left(\frac{f}{r} - 1\right)\left[1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right].$$

Отсюда $P = A \Leftrightarrow f = r$; $P > A \Leftrightarrow f > r$; $P < A \Leftrightarrow f < r$. Теорема доказана.

Обозначим через P_n, $П_n$, $Д_n$ котируемую цену облигации, размер премии и размер дисконта соответственно в момент сразу после очередной купонной выплаты, когда до погашения облигации остается n купонных платежей. Так как $\tau = 0$, то

$$P_n = A\left[\frac{f}{r}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right) + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right]. \qquad (9.4)$$

При $f > r$ облигация продается с премией:

$$П_n = P_n - A = A\left(\frac{f}{r} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right). \qquad (9.5)$$

При $f < r$ облигация продается с дисконтом:

$$Д_n = A - P_n = A\left(1 - \frac{f}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right). \qquad (9.6)$$

Пример 9.3. По 8% - ной купонной облигации номиналом 1000 д.е. и сроком до погашения 20 лет обещают ежегодно производить купонные выплаты. Определить размер премии (дисконта), если облигация продается с доходностью к погашению а) 9% годовых; б) 7% годовых.

Здесь значения параметров облигации следующие: A = 1000 д.е., f = 0,08, m = 1, T = 20 лет, n =20, а) r = 0,09; б) r = 0,07.

а) Так как $f < r$, то облигация продается с дисконтом. Согласно (9.6),

$$Д_{20} = 1000\left(1 - \frac{0{,}08}{0{,}09}\right)\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}09)^{20}}\right) = 91{,}285.$$

б) Так как $f > r$, то облигация продается с премией. Согласно (9.5),

$$П_{20} = 1000\left(\frac{0{,}08}{0{,}07} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}07)^{20}}\right) = 105{,}940.$$

Зависимость цены купонной облигации от срока до погашения.

Пусть дана облигация номиналом A, купонные выплаты по которой производятся m раз в году по годовой купонной ставке f. Предположим, годовая внутренняя доходность облигации остается неизменной и равной r до момента ее погашения. Будем считать $\tau = 0$. Рассмотрим зависимость **котируемой** цены купонной облигации от срока до погашения. Пусть в момент $t = 0$ сразу после купонного платежа до погашения облигации осталось k купонных периодов (k купонных выплат). Тогда срок до погашения облигации равен $T = \frac{k}{m}$ (лет). Зависимость котируемой цены P_k купонной облигации от срока до погашения будем рассматривать как зависимость от числа оставшихся до погашения купонных выплат k. Из (9.4) получаем:

$$P_k = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^k}\left(1-\frac{f}{r}\right)+\frac{Af}{r},$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Котируемая цена облигации в день погашения сразу после выплаты последнего купона, когда $k = 0$, равна номиналу облигации, т.е. $P_{k=0} = A$. Кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = \frac{Af}{r}$ - стоимость бессрочной облигации (см. стоимость вечной ренты, параграф 1.5).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^x}\left(1-\frac{f}{r}\right)+\frac{Af}{r},$$

определенную на множестве $[0,+\infty[$. Значения этой функции $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, , $F(n)$,… в точках $x = 0, 1, 2,\ldots, n,\ldots$, т.е. в точках $x = k$, где k – неотрицательное целое, – это котируемые цены облигации $P_{k=0}$, P_1, P_2, …, P_n, … соответственно в день погашения, за 1 купонный период до погашения, за 2,…, n купонных периодов до погашения и т.д. Таким образом, имеем равенство:

$$F(k) = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \quad , \qquad (9.7)$$

причем, $F(0) = P_{k=0} = A$ и $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \frac{Af}{r}$.

Докажем лемму.

Лемма 9.1. Справедливы следующие утверждения:

1) $F(x)$ является возрастающей вогнутой функцией на множестве $[0,+\infty[$, если $f > r$;

2) $F(x)$ является убывающей выпуклой функцией на множестве $[0,+\infty[$, если $f < r$;

3) $F(x)$ является постоянной функцией на множестве $[0, +\infty[$, если $f = r$.

Доказательство. Функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема на множестве $[0, +\infty[$. Тогда

$$F(x)' = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-x}\ln\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(\frac{f}{r}-1\right) = \begin{cases} >0, & f > r \\ <0, & f < r \\ 0, & f = r \end{cases},$$

$$F(x)'' = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-x}\ln^2\left(1+\frac{r}{m}\right)\left(1-\frac{f}{r}\right) = \begin{cases} <0, & f > r \\ >0, & f < r \\ 0, & f = r \end{cases}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Так как $F(0) = A$, то при $f = r$ функция $F(x) = A$ для каждого $x \in [0, +\infty[$. Лемма доказана.

Теорема 9.3. Если внутренняя доходность облигации r не изменяется в течение срока ее обращения, то

1) котируемая цена облигации, продающейся с премией, уменьшается с уменьшением срока до погашения и равна номиналу облигации в день погашения;

2) котируемая цена облигации, продающейся с дисконтом, увеличивается с уменьшением срока до погашения и равна номиналу облигации в день погашения;

3) котируемая цена облигации, продающейся по номиналу, остается неизменной и равной номиналу облигации в течение всего срока ее обращения.

Доказательство. Пусть $n_1 < n_2$, где n_1 и n_2 - число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, и в обоих случаях $\tau = 0$.

1) По теореме 9.2 облигация продается с премией, если $f > r$. Тогда по лемме $F(x)$ – возрастающая функция. Значит, если $n_1 < n_2$, то $F(n_1) < F(n_2)$. Используя равенство (9.7), для котируемых цен облигации получим $P_{n1} < P_{n2}$. Первое утверждение доказано.

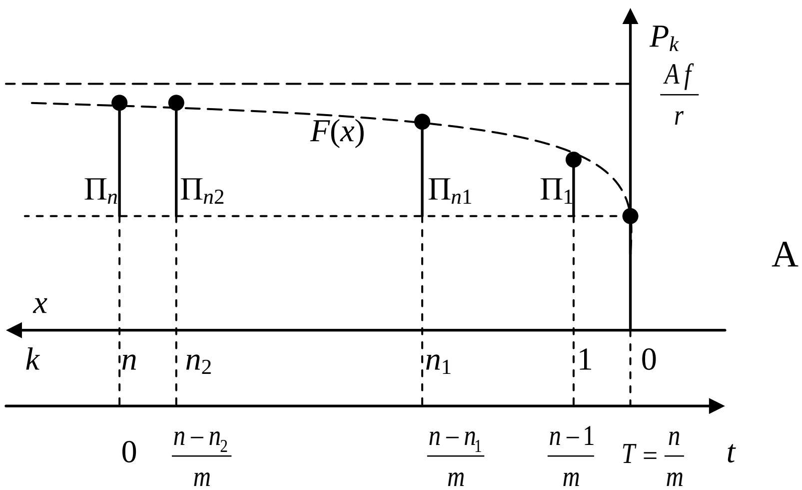


Рис. 1.9.3

2) По теореме 9.2 облигация продается сдисконтом, если $f < r$. Тогда по лемме $F(x)$ – убывающая функция. Значит, если $n_1 < n_2$, то $F(n_1) > F(n_2)$. Используя равенство (9.7), для котируемых цен облигации получим $P_{n1} > P_{n2}$. Второе утверждение доказано.

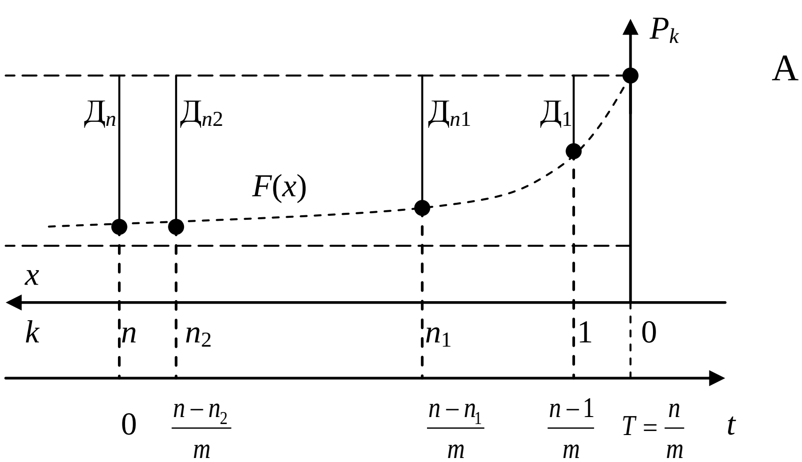


Рис. 1.9.4

3) По теореме 9.2 облигация продается по номиналу, если $f = r$. Согласно лемме, $F(x) = A$ на множестве $[0, +\infty[$. Используя равенство (9.7), для котируемых цен облигации получим $P_k = A$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

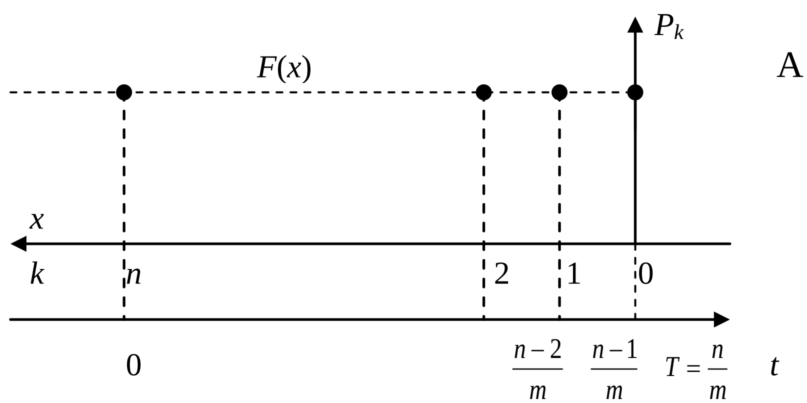


Рис. 1.9.5

Следующая теорема является следствием предыдущей.

Теорема 9.4. Если внутренняя доходность купонной облигации r не изменяется в течение срока ее обращения, то размер премии или дисконта уменьшается при уменьшении срока до погашения.

Доказательство. Пусть $n_1 < n_2$, где n_1 и n_2 - число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, и в обоих случаях $\tau = 0$.

Если облигация продается с премией, то по теореме 9.3 для котируемых цен облигации имеем $P_{n1} < P_{n2}$. Размер премии при продаже облигации за n_1 купонных платежей до погашения составляет $П_{n1} = P_{n1} – A$, а при продаже облигации за n_2 купонных платежей до погашения $П_{n2} = P_{n2} – A$. Следовательно, $П_{n1} < П_{n2}$ – величина премии уменьшается при уменьшении срока до погашения и равна нулю в день погашения облигации. Действительно, котируемая цена в день погашения (сразу после выплаты последнего купона) $P_{k = 0} = A$. Тогда размер премии в день погашения облигации равен $П_{k = 0} = P_{k = 0} – A = 0$.

Если облигация продается с дисконтом, то для котируемых цен облигации имеем $P_{n1} > P_{n2}$, где $n_1 < n_2$. Размер дисконта при продаже облигации за n_1 и n_2 купонных платежей до погашения равен $Д_{n1} = A – P_{n1}$ и $Д_{n2} = A – P_{n2}$ соответственно. Следовательно, $Д_{n1} < Д_{n2}$ – величина дисконта уменьшается при уменьшении срока до погашения и равна нулю в день погашения облигации.

Пример 9.4. Рассчитаем размер премии (дисконта) для облигации из примера 9.3 за 20 и 10 лет до ее погашения при условии, что внутренняя доходность облигации r не изменяется в течение срока ее обращения.

а) Облигация продается с дисконтом ($f = 0{,}08$, $r = 0{,}09$):

Согласно формуле (9.4)

$$P_{20} = 908{,}715\ ;\ P_{10} = 935{,}823\ .$$

Тогда

$$Д_{20} = A – P_{20} = 91{,}285;\ Д_{10} = A – P_{10} = 64{,}177.$$

б) Облигация продается с премией ($f = 0{,}08$, $r = 0{,}07$):

$$P_{20} = 1105{,}940\ ;\ P_{10} = 1070{,}236;$$

$$П_{20} = P_{20} - A = 105{,}940;\quad П_{10} = P_{10} - A = 70{,}236.$$

Если облигация продается через время τ после купонной выплаты, где $\tau \in \left[0, \frac{1}{m}\right[$, а до погашения остается n купонных платежей, то ее цена в этот момент может быть определена по формуле (9.2):

$$P = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m}\left[\frac{f}{r}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n}}\right] = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{\tau m} P_n.$$

Здесь P_n – котируемая цена облигации в момент сразу после купонной выплаты, когда до погашения облигации остается n купонных платежей(см.(9.4)). При изменении τ от 0 до $\frac{1}{m}$ цена облигации P увеличивается от P_n до $P_n\left(1+\frac{r}{m}\right)$ по показательному закону:

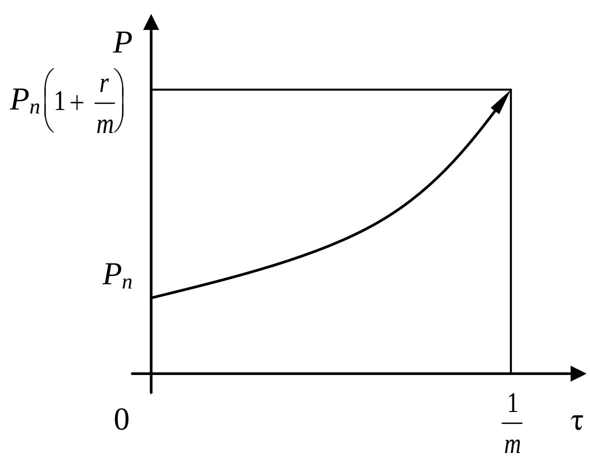


Рис. 1.9.6

Добавка к котируемой цене, накопленная за время τ, называется **накопленным купонным доходом.** При торговле на бирже принято считать, что купонный доход накапливается равномерно в течение купонного периода $\frac{1}{m}$ и равен $\frac{q}{N_{\frac{1}{m}}} N_\tau$, где $N_{\frac{1}{m}}$ - число дней в купонном периоде, N_τ - число дней в сроке τ. Так как $\frac{q}{N_{\frac{1}{m}}} N_\tau = \tau qm$, то для покупателя на бирже цена облигации через время τ после купонной выплаты составит

$$P_{\text{Б}} = P_n + \tau qm, \qquad (9.8)$$

что несколько отличается от расчета цены по формуле (9.2).

1.10. Факторы, влияющие на величину изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности.

В предыдущем параграфе установлено основное свойство облигации - ее цена изменяется в направлении, противоположном направлению изменения ее внутренней доходности. Однако, изменение цены неодинаково при снижении и повышении доходности на одну и ту же величину. Справедлива следующая теорема.

Теорема 10.1. Уменьшение внутренней доходности облигации приводит к росту ее цены на величину большую, чем соответствующее падение цены при увеличении доходности на ту же величину.

Доказательство. Пусть r и $P(r)$ – внутренняя доходность и цена облигации в текущий момент времени. Уменьшению внутренней доходности в этот момент на величину $\Delta r > 0$ соответствует рост цены облигации

$P(r–\Delta r) – P(r) = \Delta^{+}P(r)$, а увеличению внутренней доходности на ту же величину $\Delta r > 0$ соответствует падение цены $P(r) – P(r + \Delta r) = \Delta^{–}P(r)$. Покажем, что $\Delta^{+}P(r) > \Delta^{–}P(r)$.

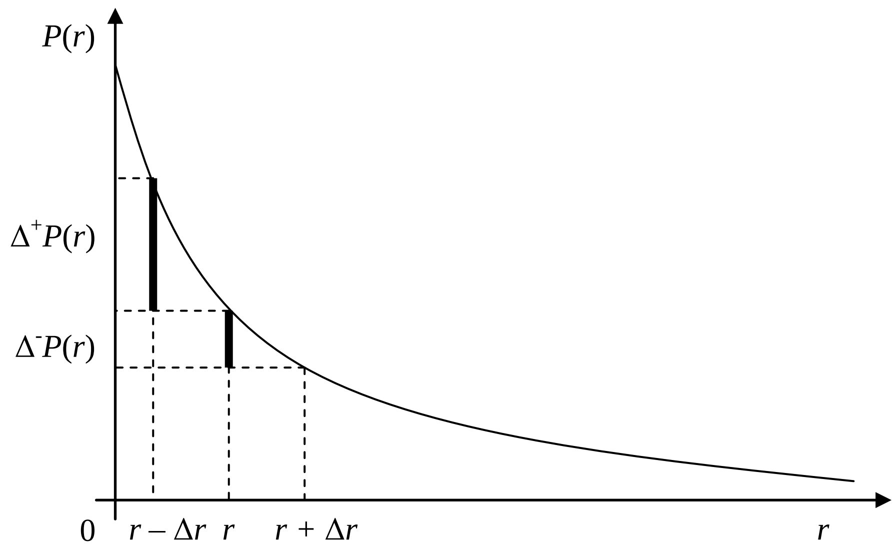


Рис. 1.10.1

По теореме Лагранжа существуют точки $r_1 \in]r - \Delta r, r[$ и $r_2 \in]r, r + \Delta r[$ такие, что

$$P(r - \Delta r) - P(r) = P^{/}(r_1)\big((r - \Delta r) - r\big),$$

$$P(r) - P(r + \Delta r) = P^{/}(r_2)\big(r - (r + \Delta r)\big).$$

Отсюда

$$\Delta^{+}P(r) = – P^{/}(r_1)\Delta r,$$

$$\Delta^{–}P(r) = – P^{/}(r_2)\Delta r.$$

По теореме 9.1 функция $P(r)$ является выпуклой, т.е. $P(r)^{//}_{rr} > 0$. Значит, производная

$P^{/}(r)$ – возрастающая функция. Так как $r_1 < r_2$, то $P^{/}(r_1) < P^{/}(r_2)$. Отсюда

$$– P^{/}(r_1)\Delta r > – P^{/}(r_2)\Delta r,$$

где $\Delta r > 0$. Следовательно,

$$\Delta^{+}P(r) > \Delta^{-}P(r).$$

Как следует из доказательства, данное свойство изменения цены облигации можно объяснить выпуклостью функции $P(r)$.

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо и для относительного изменения цены. Действительно, из доказанного неравенства сразу получаем

$$\frac{\Delta^{+}P(r)}{P(r)} > \frac{\Delta^{-}P(r)}{P(r)},$$

или

$$\frac{P(r-\Delta r)-P(r)}{P(r)} > \frac{P(r)-P(r+\Delta r)}{P(r)}.$$

Пример 10.1. По 8% - ной купонной облигации номиналом 1000 д.е. и сроком до погашения 10,25 лет обещают производить каждые полгода купонные платежи. Внутренняя доходность облигации равна 8% годовых. Найти изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину Δr = 1%.

Значения параметров облигации: A = 1000 д.е., f = 0,08, r = 0,08; m = 2, T = 10,25 года. Так как Tm = 20,5, то n = [20,5] + 1 = 21. Тогда $\tau = \frac{n}{m} - T$ = $\frac{21}{2} - 10{,}25$ = 0,25 (года). По формуле (9.2) находим

$$P(0{,}08) = 1000\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{0{,}5} = 1019{,}8039,$$

$$P(0{,}09) = 1000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}09}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{21}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{21}}\right] = 953{,}7374,$$

$$P(0{,}07)=1000\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{21}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{21}}\right]=1092{,}1144.$$

Следовательно,

$$P(0{,}08)-P(0{,}09)=66{,}067=\Delta^{-}P(0{,}08),$$

$$P(0{,}07)-P(0{,}08)=72{,}310=\Delta^{+}P(0{,}08),$$

$$\Delta^{+}P(0{,}08)>\Delta^{-}P(0{,}08).$$

Для относительного изменения цены получаем

$$\frac{\Delta^{+}P(0{,}08)}{P(0{,}08)}=0{,}071>0{,}065=\frac{\Delta^{-}P(0{,}08)}{P(0{,}08)}.$$

Характер изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности одинаков для всех облигаций, однако степень этого процесса зависит и от уровня процентных ставок рынка.

Теорема 10.2. Чем выше уровень процентных ставок рынка, тем меньше изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности на заданную величину.

Доказательство. Рассмотрим облигацию, продающуюся при двух уровнях доходности рынка $r_н < r_в$. По свойству внутренней доходности, это означает продажу облигации при двух различных уровнях ее внутренней доходности. Пусть в обоих случаях доходность увеличилась на одну и ту же величину $\Delta r > 0$. Будем считать, что $\left]r_H, r_H+\Delta r\right[\cap\left]r_B, r_B+\Delta r\right[=\varnothing$. Падение цены облигации при уровнях доходности $r_н$ и $r_в$ равно соответственно

$$P(r_н)-P(r_н+\Delta r)=\Delta^{-}P(r_н) \quad \text{и} \quad P(r_в)-P(r_в+\Delta r)=\Delta^{-}P(r_в).$$

Покажем, что $\Delta^{-}P(r_н)>\Delta^{-}P(r_в)$.

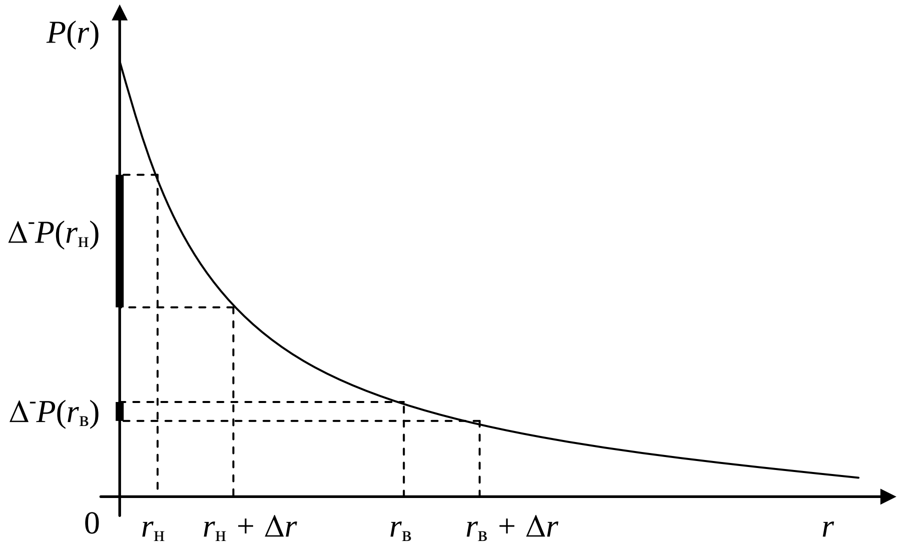


Рис. 1.10.2

По теореме Лагранжа существуют точки $r_1 \in \left]r_H, r_H + \Delta r\right[$ и $r_2 \in \left]r_B, r_B + \Delta r\right[$ такие, что

$$P(r_{н}) - P(r_{н} + \Delta r) = -P'(r_1)\Delta r \quad \text{и} \quad P(r_{в}) - P(r_{в} + \Delta r) = -P'(r_2)\Delta r, \quad \text{т.е.}$$

$$\Delta^{-}P(r_{н}) = -P'(r_1)\Delta r \quad \text{и} \quad \Delta^{-}P(r_{в}) = -P'(r_2)\Delta r.$$

Так как $\left]r_H, r_H + \Delta r\right[\cap \left]r_B, r_B + \Delta r\right[= \varnothing$, то $r_1 < r_2$. Следовательно, $P'(r_1) < P'(r_2)$. Отсюда

$$-P'(r_1)\Delta r > -P'(r_2)\Delta r,$$

где $\Delta r > 0$. Значит,

$$\Delta^{-}P(r_{н}) > \Delta^{-}P(r_{в}).$$

Таким образом, абсолютное падение цены облигации тем меньше, чем выше уровень процентных ставок рынка.

Доказательство аналогично, если рассмотреть абсолютный рост цены облигации при уменьшении доходности на $\Delta r > 0$. Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы можно доказать и для относительного изменения цены облигации.

Пример 10.2. Рассмотрим облигацию с параметрами: $A = 100$ д.е., $f = 0{,}09$; $m = 1$; $T = 25$ лет, продающуюся при двух уровнях доходности: $r_{\text{н}} = 0{,}07$ и $r_{\text{в}} = 0{,}13$. В обоих случаях доходность увеличилась на 1%.

По формуле (9.2) находим ($\tau = 0$)

$$P(0{,}07) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}07)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}07)^{25}}\right] = 123{,}3072$$

$$P(0{,}08) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}08}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}08)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}08)^{25}}\right] = 110{,}6748$$

$$P(0{,}13) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}13}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}13)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}13)^{25}}\right] = 70{,}6801$$

$$P(0{,}14) = 100\left[\frac{0{,}09}{0{,}14}\left(1-\frac{1}{(1+0{,}14)^{25}}\right)+\frac{1}{(1+0{,}14)^{25}}\right] = 65{,}6354$$

Увеличение доходности в каждом случае привело к снижению цены на величину

$$\Delta^{-}P(r_{\text{н}}) = \Delta^{-}P(0{,}07) = P(0{,}07) - P(0{,}08) = 12{,}6324,$$

$$\Delta^{-}P(r_{\text{в}}) = \Delta^{-}P(0{,}13) = P(0{,}13) - P(0{,}14) = 5{,}0447.$$

Следовательно, $\Delta^{-}P(0{,}07) > \Delta^{-}P(0{,}13)$.

Для относительных изменений цен получаем

$$\frac{\Delta^{-}P(0{,}07)}{P(0{,}07)} > \frac{\Delta^{-}P(0{,}13)}{P(0{,}13)},$$

поскольку

$$\frac{\Delta^- P(r_H)}{P(r_H)} = \frac{\Delta^- P(0{,}07)}{P(0{,}07)} = 0{,}1024,$$

$$\frac{\Delta^- P(r_B)}{P(r_B)} = \frac{\Delta^- P(0{,}13)}{P(0{,}13)} = 0{,}0714.$$

В следующих теоремах устанавливается зависимость величины изменения цены облигации от купонной ставки и срока до погашения.

Теорема 10.3. Пусть срок до погашения облигации больше одного купонного периода. Тогда относительное изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности тем больше, чем меньше купонная ставка.

Доказательство. Рассмотрим две купонные облигации, все параметры которых совпадают, кроме купонных ставок. Пусть r – внутренняя доходность облигаций в текущий момент времени. Предположим, внутренняя доходность облигаций в этот момент снизилась на величину $\Delta r > 0$. Сравним относительный рост стоимости этих облигаций. Пусть для определенности $f_1 < f_2$.

$$\frac{P_{f_1}(r-\Delta r) - P_{f_1}(r)}{P_{f_1}(r)} - \frac{P_{f_2}(r-\Delta r) - P_{f_2}(r)}{P_{f_2}(r)} = \frac{P_{f_1}(r-\Delta r)}{P_{f_1}(r)} - \frac{P_{f_2}(r-\Delta r)}{P_{f_2}(r)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{m} f_1 A}{(1+r-\Delta r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r-\Delta r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{m} f_1 A}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{m} f_2 A}{(1+r-\Delta r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r-\Delta r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{m} f_2 A}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}} =$$

$$= \frac{f_1 a + b}{f_1 c + d} - \frac{f_2 a + b}{f_2 c + d} = \frac{(f_2 - f_1)(bc - ad)}{(f_1 c + d)(f_2 c + d)}.$$

Так как $f_2 > f_1$, то знак этого выражения совпадает со знаком разности $bc - ad$.

Рассмотрим $bc - ad =$

$$= \frac{1}{m(1+r-\Delta r)^{\frac{n}{m}-\tau}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} - \frac{1}{m(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r-\Delta r)^{\frac{i}{m}-\tau}} =$$

$$= \frac{1}{m(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}(1+r-\Delta r)^{\frac{n}{m}-\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{(1+r)^{\frac{i-n}{m}}} - \frac{1}{(1+r-\Delta r)^{\frac{i-n}{m}}}\right] > 0$$

поскольку $n > 1,\ i \le n,\ \Delta r > 0$. Следовательно

$$\frac{P_{f_1}(r-\Delta r) - P_{f_1}(r)}{P_{f_1}(r)} > \frac{P_{f_2}(r-\Delta r) - P_{f_2}(r)}{P_{f_2}(r)},$$

где $f_1 < f_2$. Доказательство аналогично, если рассмотреть относительное падение цен облигаций. Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы справедливо только для относительного изменения цены облигации. Несложно убедиться, что чем меньше купонная ставка, тем меньше абсолютное изменение цены облигации при изменении ее внутренней доходности. Кроме того, предлагается самостоятельно доказать, что кривые зависимости $P(r)$ для $f_1 < f_2$ имеют вид, показанный на рисунке 10.3.

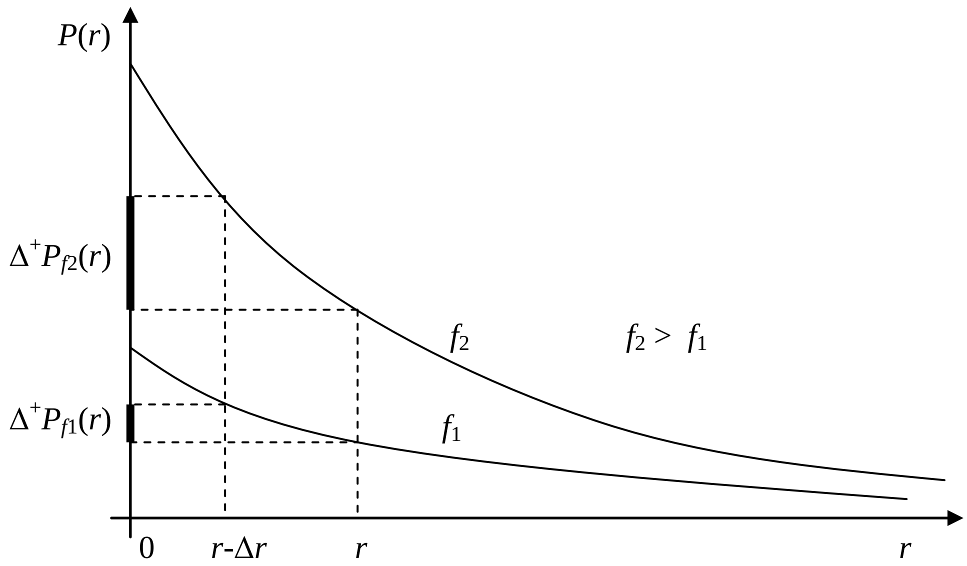


Рис. 1.10.3

Пример 10.3. По купонной облигации номиналом 1000 д.е. и сроком до погашения 9,25 лет обещают производить каждые полгода купонные платежи. Внутренняя доходность облигации равна 9% годовых. Сравнить величины относительного роста и падения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину $\Delta r = 2\%$ для купонных ставок 8 и 9% годовых.

Параметры облигации: $A = 1000$ д.е., $r = 0{,}09$; $f_1 = 0{,}08$; $f_2 = 0{,}09$; $m = 2$, $T = 9{,}25$ года. Так как $Tm = 18{,}5$, то $n = [18{,}5] + 1 = 19$. Тогда $\tau = \frac{n}{m} - T =$

$= \frac{19}{2} - 9{,}25 = 0{,}25$ (года). Здесь $f_1 < f_2$.

1) Сравним величины относительного роста цены при уменьшении внутренней доходности облигации на 2%. По формуле (9.2) находим

$$P_{f_1}(0{,}09) = 1000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}09}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{19}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{19}}\right] = 957{,}8848,$$

$$P_{f_1}(0{,}07) = 1000\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}08}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right] = 1087{,}0878,$$

$$P_{f_2}(0{,}09) = 1000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{0{,}5} = 1022{,}252$$

$$P_{f_2}(0{,}07) = 1000\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{0{,}5}\left[\frac{0{,}09}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right)+\frac{1}{\left(1+\frac{0{,}07}{2}\right)^{19}}\right] = 1156{,}826.$$

Тогда

$$\frac{P_{f_1}(0{,}07)-P_{f_1}(0{,}09)}{P_{f_1}(0{,}09)} = 0{,}1349 > 0{,}1317 = \frac{P_{f_2}(0{,}07)-P_{f_2}(0{,}09)}{P_{f_2}(0{,}09)}.$$

2) Сравним величины относительного падения цены при увеличении внутренней доходности облигации на 2%. По формуле (9.2)

$$P_{f_1}(0{,}11) = 848{,}2931;\ P_{f_2}(0{,}11) = 907{,}906.$$

Тогда

$$\frac{P_{f_1}(0{,}09)-P_{f_1}(0{,}11)}{P_{f_1}(0{,}09)} = 0{,}1144 > 0{,}1119 = \frac{P_{f_2}(0{,}09)-P_{f_2}(0{,}11)}{P_{f_2}(0{,}09)}.$$

Замечание. Для абсолютных изменений цены имеем

$$P_{f_1}(0{,}07)-P_{f_1}(0{,}09) = 129{,}203 < 134{,}574 = P_{f_2}(0{,}07)-P_{f_2}(0{,}09),$$

$$P_{f_1}(0{,}09)-P_{f_1}(0{,}11) = 109{,}592 < 114{,}346 = P_{f_2}(0{,}09)-P_{f_2}(0{,}11),$$

где $f_1 < f_2$.

Теорема 10.4. Если внутренняя доходность купонной облигации не изменяется в течение срока ее обращения, то изменение размера премии или дисконта тем больше, чем меньше срок до погашения.

Доказательство. Размер премии в момент, когда до погашения облигации остается n купонных платежей, равен

$$\Pi_n = A\left(\frac{f}{r} - 1\right)\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^n}\right),$$

где $f > r$. Пусть $n_1 < n_2$, где n_1 и n_2 – число купонных платежей, оставшихся до погашения облигации, и ʒ = 0. Рассмотрим разность $(\Pi_{n1} - \Pi_{n1-1}) - (\Pi_{n2} - \Pi_{n2-1}) =$

$$= A\left(\frac{f}{r} - 1\right)\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1-1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1}} + \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_2}} - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_2-1}}\right) =$$

$$= A\left(\frac{f}{r} - 1\right)\frac{r}{m}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1}} - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_2}}\right) > 0.$$

Аналогично можно доказать утверждение и для изменения дисконта. Теорема доказана.

Пример 10.4. Для облигации, рассмотренной в примерах 9.3 и 9.4 с параметрами $A = 1000$ д.е., $f = 0{,}08$, $m = 1$ при условии, что ее внутренняя доходность r не изменяется в течение срока обращения, имеем:

а) облигация продается с дисконтом, $r = 0{,}09$:

$$Д_{20} = 91{,}285; \quad Д_{19} = 89{,}501; \quad Д_{20} - Д_{19} = 1{,}784;$$

$$Д_{10} = 64{,}177; \quad Д_{9} = 59{,}952; \quad Д_{10} - Д_{9} = 4{,}224.$$

Следовательно, $Д_{10} - Д_9 > Д_{20} - Д_{19}$.

б) облигация продается с премией, $r = 0{,}07$:

$$П_{20} = 105{,}940; \quad П_{19} = 103{,}356; \quad П_{20} - П_{19} = 2{,}584;$$

$$П_{10} = 70{,}236; \quad П_{9} = 65{,}152; \quad П_{10} - П_{9} = 5{,}083.$$

Следовательно, $П_{10} - П_9 > П_{20} - П_{19}$.

1.11. Дюрация и показатель выпуклости облигации.

Для облигации, не имеющей кредитного риска, всегда существует процентный риск. Это риск уменьшения цены облигации вследствие изменения процентных ставок на рынке. Чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Ранее установлено, что на относительное изменение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении ее внутренней доходности влияют уровень начальной доходности, купонная ставка, срок до погашения. Однако существует показатель, который позволяет оценить возможные значения величины $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, не производя вычислений цены облигации до и после изменения процентных ставок.

Рассмотрим облигацию, по которой через t_1, $t_2,\ldots, t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$ обещают выплатить денежные суммы C_1, $C_2,\ldots, C_n$ соответственно. Предположим, временная структура процентных ставок в этот момент такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда рыночная стоимость облигации равна

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} . \qquad (11.1)$$

Предположим, временная структура процентных ставок мгновенно изменилась так, что безрисковые процентные ставки для всех сроков изменились на одну и ту же величину Δr. Тогда стоимость облигации станет равной

$$P(r + \Delta r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1 + r + \Delta r)^{t_i}} . \qquad (11.2)$$

$\Delta r > 0$ означает увеличение процентных ставок, $\Delta r < 0$ – уменьшение. Приращение стоимости $\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r)$ является положительной величиной при $\Delta r < 0$ и означает рост стоимости облигации при снижении процентных ставок на рынке. Отрицательное значение величины $\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r)$ означает падение цены облигации при увеличении процентных ставок на величину $\Delta r > 0$. Такой же смысл имеет знак относительного приращения стоимости облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. Относительное приращение стоимости облигации при изменении процентных ставок на величину Δr равно

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} = \frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{P(r)}, \qquad (11.3)$$

где $P(r)$ и $P(r + \Delta r)$ рассчитываются по формулам (11.1) и (11.2). Рассмотрим, как можно оценить величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, не используя точных вычислений по формуле (11.3).

Считая Δr достаточно малым по абсолютной величине, получим по формуле Тейлора

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \approx P'(r)\Delta r$$

или с учетом членов разложения второго порядка

$$\Delta P(r) = P(r + \Delta r) - P(r) \approx P'(r)\Delta r + \frac{1}{2} P''(r)(\Delta r)^2.$$

Члены более высокого порядка считаются незначительными при определении чувствительности цены облигации к изменению процентных ставок на рынке. Для относительных приращений цены облигации имеем

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P^{/}(r)}{P(r)}\Delta r \qquad (11.4)$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx \frac{P^{/}(r)}{P(r)}\Delta r + \frac{1}{2}\frac{P^{//}(r)}{P(r)}(\Delta r)^2 . \qquad (11.5)$$

Так как $P(r) = \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, то $P^{/}(r) = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i C_i(0)$ и

$$P^{//}(r) = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)C_i(0),$$

где $C_i(0) = \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ - приведенные к моменту $t = 0$ платежи по облигации. Тогда

$$\frac{P^{/}(r)}{P(r)} = -\frac{1}{1+r}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} ,$$

$$\frac{P^{//}(r)}{P(r)} = \frac{1}{(1+r)^2}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)} .$$

Определение. Число

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} \qquad (11.6)$$

называется дюрацией облигации, или дюрацией Маколея.

Дюрация облигации представляет собой средневзвешенный срок выплат по облигации, где весами являются текущие стоимости выплат $C_i(0)$, деленные на рыночную цену облигации $P(r)$. Таким образом, коэффициент $\frac{C_i(0)}{P(r)}$ выражает долю рыночной цены облигации, которая будет получена через t_i лет, i = 1, 2, …, n. Сумма коэффициентов в формуле (11.6) равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = \frac{1}{P(r)} \sum_{i=1}^{n} C_i(0) = \frac{1}{P(r)} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{P(r)} P(r) = 1.$$

Определение. Число

$$C = \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{C_i(0)}{P(r)} \qquad (11.7)$$

называется показателем выпуклости облигации.

Таким образом,

$$\frac{P'(r)}{P(r)} = -D \frac{1}{1+r},$$

$$\frac{P''(r)}{P(r)} = C \frac{1}{(1+r)^2}.$$

Тогда из формул (11.4) и (11.5) получаем

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D \frac{\Delta r}{1+r} \qquad (11.8)$$

или

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C \left(\frac{\Delta r}{1+r} \right)^2. \qquad (11.9)$$

Проанализируем эти выражения. Так как чувствительность цены облигации к изменению процентных ставок характеризуется величиной $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$, то из (11.8) следует, что дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменению временной структуры процентных ставок. Следовательно, дюрацию облигации можно рассматривать как меру процентного риска облигации – чем больше дюрация, тем больше процентный риск облигации.

Пусть $\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -D\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}C\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2$ и показатель выпуклости C таков, что вторым слагаемым нельзя пренебречь по сравнению с первым. Следовательно, чем больше показатель выпуклости, тем хуже дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$. И наоборот – чем меньше C, тем более верным является приближенное равенство (11.8). Следовательно, чем меньше C, тем лучше дюрация облигации оценивает чувствительность цены облигации к изменениям временной структуры процентных ставок. Таким образом, показатель выпуклости облигации можно интерпретировать как показатель того, насколько точно дюрация облигации оценивает величину $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$.

Таким образом, в момент $t = 0$ дюрация облигации является мерой ее процентного риска при следующих условиях:

1) в начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r (кривая доходностей является горизонтальной);

2) процентные ставки для всех сроков изменились мгновенно в этот же момент на одну и ту же величину Δr (кривая доходностей переместилась параллельно самой себе);

3) Δr мало;

4) показатель выпуклости облигации мал, т.е. справедлива формула (11.8).

На рис. 1.11.1 показана зависимость стоимости облигации $P(r + \Delta r)$ от доходности $(r + \Delta r)$. Кривая 1 построена по формуле (11.2) для точного поведения цены. Из формул (11.8) и (11.9) получим выражения для приближенного поведения цены:

$$P(r + \Delta r) \approx P(r) - DP(r)\frac{\Delta r}{1+r}, \qquad (11.10)$$

$$P(r + \Delta r) \approx P(r) - DP(r)\frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2}CP(r)\left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2. \qquad (11.11)$$

Зависимость (11.10), описывающая изменение цены только с помощью дюрации облигации, является линейной относительно $(r + \Delta r)$ (кривая 2). Зависимость (11.11), описывающая изменение цены облигации с помощью дюрации и показателя выпуклости, является квадратичной (кривая 3).

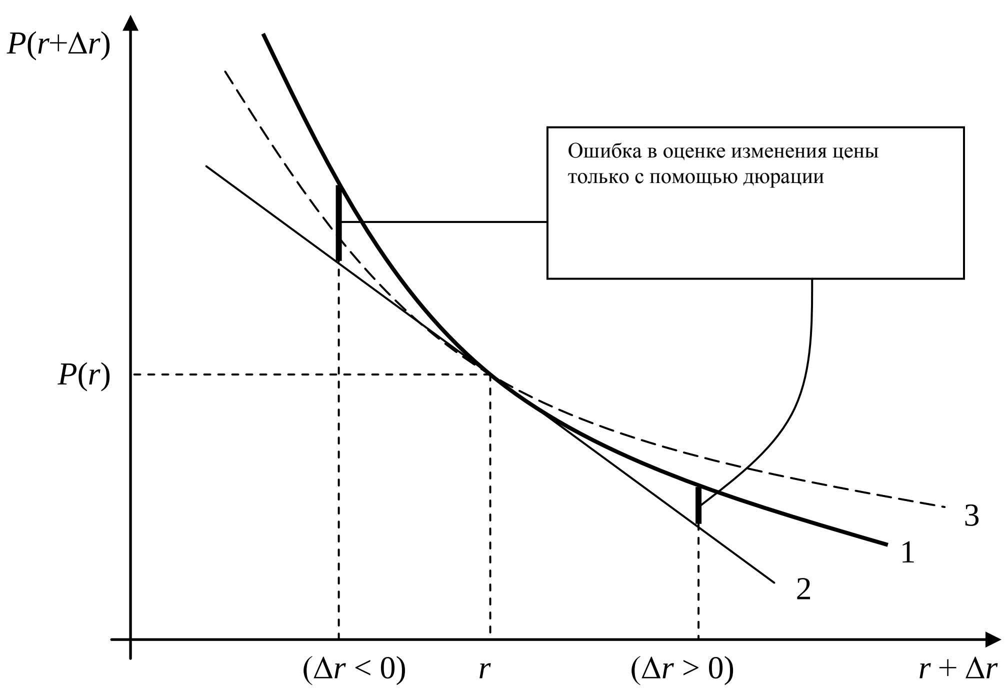


Рис. 1.11.1

Пример 11.1. Дана 6% - ная купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты каждые полгода в течение 3 лет. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и составляют 8% в год. Определить:

1. Дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2. Относительное изменение цены облигации $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ при изменении процентных ставок на величину Δr = 0,01; 0,02; – 0,01 по формулам: (11.3) – точное значение, (11.8) – приближенное с учетом только дюрации облигации, (11.9) - приближенное с учетом дюрации и показателя выпуклости облигации.

Здесь значения параметров облигации следующие: A = 1000 д.е., f = 0,06, m = 2, T = 3 года, r = 0,08.

1. Результаты расчета дюрации и показателя выпуклости облигации приведены в таблице:

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$	$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$
1	0,5	30	28,867513	0,030339	0,015170	0,022754
2	1	30	27,777778	0,029194	0,029194	0,058388
3	1,5	30	26,729179	0,028092	0,042138	0,105345
4	2	30	25,720165	0,027031	0,054063	0,162189
5	2,5	30	24,749240	0,026011	0,065028	0,227596
6	3	1030	817,647208	0,859332	2,577997	10,311990
		С умма	951,491083	1,000000	2,783589	10,888262

Таким образом, цена облигации $P(0{,}08) = 951{,}491$ д.е., ее дюрация $D = 2{,}784$ года, показатель выпуклости $C = 10{,}888$ лет^2.

2. Расчеты относительного изменения цены по формулам (11.3), (11.8), (11.9) для трех значений Δr приведены в таблице:

Δr		0,01	0,02	-0,01
$\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$	Формула (11.3)	-0,025314	-0,049736	0,026248
	Формула (11.8)	-0,025774	-0,051548	0,025774
	Формула (11.9)	-0,025307	-0,049681	0,026241

Отрицательные значения $\frac{\Delta P(r)}{P(r)}$ соответствуют падению цены при увеличении процентных ставок, положительные – ее росту при снижении процентных ставок. Из расчетов видно, что чем меньше величина Δr по абсолютной величине, тем ближе значения, получаемые по формулам (11.3) и (11.8). Значит, тем меньше ошибка в оценке изменения цены только с помощью дюрации облигации.

Свойства дюрации и показателя выпуклости облигации.

1. Дюрация облигации не превосходит срока до ее погашения T.

Действительно,

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i(0)}{P(r)} \le \sum_{i=1}^{n} t_n \frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i(0)}{P(r)} = t_n = T \,,$$

где $P(r)$ – рыночная стоимость облигации в момент $t = 0$, r – ее внутренняя доходность.

2. Дюрация чисто дисконтной облигации равна сроку до ее погашения.

Действительно, для чисто дисконтной облигации имеем

$$P(r) = \frac{A}{(1+r)^T},$$

где A – номинал облигации. Тогда дюрация облигации равна

$$D = T\,\frac{\frac{A}{(1+r)^T}}{P(r)} = T.$$

3. Если облигация не является чисто дисконтной, то чем больше внутренняя доходность облигации, тем меньше ее дюрация и показатель выпуклости.

Доказательство. Рассмотрим облигацию, по которой через t_1, $t_2, \ldots, t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$ ($0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$) обещают выплатить денежные суммы C_1, $C_2, \ldots, C_n$ соответственно. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Покажем, что дюрация D и показатель выпуклости C облигации - это убывающие функции r. Согласно определению

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}.$$

Рассмотрим производную

$$D_r' = \frac{1}{P(r)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(-t_i^2)\frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} + \sum_{i=1}^{n} t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i+1}}\sum_{i=1}^{n} t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right] =$$

$$= \frac{1}{P(r)^2(1+r)}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} t_i^2\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right].$$

Используем обозначения

$$a = \sum_{i=1}^{n} t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}, \quad b = \sum_{i=1}^{n} t_i^2\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}, \quad c = \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}.$$

Покажем, что $a^2 - bc < 0$ методом математической индукции по числу платежей n.

Основание индукции $n = 2$.

$$a^2 - bc = \left(t_1 \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + t_2 \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right)^2 - \left(t_1^{\,2} \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + t_2^{\,2} \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right)\left(\frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right) =$$

$= -\dfrac{C_1 C_2}{(1+r)^{t_1+t_2}}(t_2 - t_1)^2 < 0$, где $t_2 > t_1$.

Предположим, что утверждение верно для ($n-1$) платежей по облигации, т.е.

$$a_1^{\,2} - b_1 c_1 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\,2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right] < 0.$$

Пусть теперь число платежей по облигации равно n. Рассмотрим

$$a^2 - bc = \left(a_1 + t_n \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}\right)^2 - \left(b_1 + t_n^{\,2} \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}\right)\left(c_1 + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}\right) =$$

$$= \left(a_1^{\,2} - b_1 c_1 \right) - \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}(c_1 t_n^{\,2} - 2a_1 t_n + b_1) ,$$

где $a_1^{\,2} - b_1 c_1 < 0$ по предположению индукции.

$$c_1 t_n^{\,2} - 2a_1 t_n + b_1 = t_n^{\,2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} - 2t_n \sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} + \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\,2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$= \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}(t_n^{\,2} - 2t_n t_i + t_i^{\,2}) = \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}(t_n - t_i)^2 > 0$, где $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$.

Следовательно $a^2 - bc < 0$ для всех целых $n > 1$. Значит, $D_r^{/} < 0$.

Согласно определению, показатель выпуклости равен

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}.$$

Тогда

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} = D + B,$$

где $D=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}$ – дюрация облигации, $B=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^{\ 2} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}$. Следовательно,

$C_r^{'}=D_r^{'}+B_r^{'}$, где $D_r^{'}<0$. Покажем, что $B_r^{'}<0$.

$$B_r^{'}=\frac{1}{P(r)^2(1+r)}\left[\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i=1}^{n} t_i^{\ 2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} - \sum_{i=1}^{n} t_i^{\ 3} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right].$$

Используем обозначения

$$a=\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}},\quad b=\sum_{i=1}^{n} t_i^{\ 2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}},\quad c=\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}},\quad d=\sum_{i=1}^{n} t_i^{\ 3} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}.$$

Покажем, что $ab-dc<0$ методом математической индукции по числу платежей n.

Если $n=2$, то

$$ab-dc=\left(t_1 \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}}+t_2 \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right)\left(t_1^{\ 2} \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}}+t_2^{\ 2} \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right)-$$

$$-\left(t_1^{\ 3} \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}}+t_2^{\ 3} \frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right)\left(\frac{C_1}{(1+r)^{t_1}}+\frac{C_2}{(1+r)^{t_2}}\right)=$$

$$=\frac{C_1C_2}{(1+r)^{t_1+t_2}}(t_2-t_1)(t_1^{\ 2}-t_2^{\ 2})<0, \text{ где } 0<t_1<t_2.$$

Положим, $B_r^{'}<0$ для ($n-1$) платежей по облигации, т.е.

$$a_1b_1-d_1c_1=\left[\sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\ 2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\ 3} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right]<0.$$

Для n платежей по облигации имеем

$$ab-dc=(a_1+t_n \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}})(b_1+t_n^{\ 2} \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}})-(d_1+t_n^{\ 3} \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}})(c_1+\frac{C_n}{(1+r)^{t_n}})=$$

$$=a_1b_1-d_1c_1+\frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}\left(t_n^{\ 2}(a_1-t_nc_1)+t_nb_1-d_1\right).$$

$a_1b_1-d_1c_1<0$ по предположению индукции, $t_n^{\ 2}(a_1-t_nc_1)+t_nb_1-d_1=$

$$= t_n^{\ 2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} - t_n\sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\right) + t_n\sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\ 2} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} - \sum_{i=1}^{n-1} t_i^{\ 3} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} =$$

$$= t_n^{\,2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} (t_i - t_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}\ t_i^{\,2} (t_n - t_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} (t_n - t_i)(t_i^{\,2} - t_n^{\,2}) < 0, \text{ где } 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n.$$

Значит, $ab - dc < 0$ для всех целых $n > 1$. Следовательно $B_r^{'} < 0$. Тогда $C_r^{'} < 0$. Свойство доказано.

4. Если все платежи по облигации отсрочить на t_0 лет, не изменяя ее внутренней доходности r, то дюрация облигации увеличится на t_0 лет, а показатель выпуклости – на $(t_0^2 + 2\, t_0 D + t_0)$ лет^2.

Доказательство. Дюрация исходной облигации

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}.$$

Дюрация облигации с отсроченными платежами

$$D_{t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (t_i + t_0) \frac{C_i}{(1+r)^{t_i + t_0}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i + t_0}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}} + t_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} + t_0 = D + t_0.$$

Таким образом,

$$D_{t_0} = D + t_0. \qquad (11.12)$$

Показатель выпуклости исходной облигации

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i (t_i + 1) \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}.$$

Показатель выпуклости облигации с отсроченными платежами равен

$$C_{t_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i+t_0)(t_i+t_0+1)\frac{C_i}{(1+r)^{t_i+t_0}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i+t_0}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[t_i(t_i+1)+t_0{}^2+2t_0t_i+t_0\right]\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}t_i(t_i+1)\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} + 2t_0\frac{\sum_{i=1}^{n}t_i\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} + (t_0{}^2+t_0)\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{C_i}{(1+r)^{t_i}}} =$$

$$= C + 2\,t_0D + t_0^2 + t_0\,.$$

Таким образом,

$$C_{t_0} = C + (t_0^2 + 2\,t_0D + t_0\,). \qquad (11.13)$$

Свойство доказано.

5. Если до погашения облигации остается больше одного купонного периода, то при заданном значении внутренней доходности r дюрация облигации и показатель выпуклости тем больше, чем меньше купонная ставка.

Доказательство. Покажем, что дюрация облигации и показатель выпуклости – убывающие функции купонной ставки f.

Формула (11.6) для дюрации купонной облигации, продающейся через время τ после купонной выплаты с доходностью к погашению r, когда до погашения остается n купонных выплат, имеет вид:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{m}-\tau\right)\frac{\frac{1}{m}fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \left(\frac{n}{m}-\tau\right)\frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{m}fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}\,. \qquad (11.14)$$

Цена облигации

$$P(r) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{m}f\,A}{\left(1+r\right)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{\left(1+r\right)^{\frac{n}{m}-\tau}}\,.$$

Используем обозначения

$$a_i = \frac{\frac{1}{m}}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}}, \; b = \frac{1}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}. \qquad (11.15)$$

Тогда

$$D = \frac{f\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)a_i + (\frac{n}{m}-\tau)b}{f\sum_{i=1}^{n}a_i + b}.$$

Рассмотрим производную дюрации по купонной ставке f.

$$D_f^{/} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)a_i\right)\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right) - \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(f\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)a_i + (\frac{n}{m}-\tau)b\right)}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2} =$$

$$= \frac{b\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)a_i - b\sum_{i=1}^{n}a_i(\frac{n}{m}-\tau)}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2} = \frac{b\sum_{i=1}^{n}a_i(\frac{i}{m}-\frac{n}{m})}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2} < 0,$$

так как $i \le n$ и по условию $n > 1$. Таким образом, $D_f^{/} < 0$.

Показатель выпуклости купонной облигации равен

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)(\frac{i}{m}-\tau+1)\frac{\frac{1}{m}fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + (\frac{n}{m}-\tau)(\frac{n}{m}-\tau+1)\frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{m}fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}-\tau}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}-\tau}}}. \qquad (11.16)$$

Используем те же обозначения (11.15). Тогда

$$C = \frac{f\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)(\frac{i}{m}-\tau+1)a_i + (\frac{n}{m}-\tau)(\frac{n}{m}-\tau+1)b}{f\sum_{i=1}^{n}a_i + b}.$$

Рассмотрим производную

$$C_f^{/} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)(\frac{i}{m}-\tau+1)a_i\right)\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2} -$$

$$- \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(f\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)(\frac{i}{m}-\tau+1)a_i + (\frac{n}{m}-\tau)(\frac{n}{m}-\tau+1)b\right)}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2}.$$

Отсюда

$$C_f^{/} = \frac{b\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{m}-\tau)(\frac{i}{m}-\tau+1)a_i - b\sum_{i=1}^{n}a_i(\frac{n}{m}-\tau)(\frac{n}{m}-\tau+1)}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2} =$$

$$= \frac{b\sum_{i=1}^{n}a_i\left((\frac{i}{m}-\tau)(\frac{i}{m}-\tau+1) - (\frac{n}{m}-\tau)(\frac{n}{m}-\tau+1)\right)}{\left(f\sum_{i=1}^{n}a_i + b\right)^2} < 0.$$

Таким образом, $C_f^{'} < 0$. Свойство доказано.

6. Зависимость дюрации облигации от срока до погашения при неизменных f и r, где f и r – купонная ставка и внутренняя доходность облигации соответственно, сформулируем в виде следующих утверждений. Пусть D_n – дюрация облигации, платежи по которой выплачиваются m раз в год и до погашения которой остается n купонных периодов. Тогда

6*a*. $\lim_{n\to\infty} D_n \approx \frac{r+m}{rm}$.

6*b*. Если $f \geq r$, то последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей.

6*c*. Если $f < r$, то можно указать число n_0 такое, что для облигаций с числом периодов до погашения $n < n_0$ последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей.

Доказательство. 6*а*. Согласно (11.14), дюрация облигации при $\tau = 0$, когда до погашения остается n купонных периодов, равна

$$D_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m} \frac{\frac{1}{m} fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}}} + \frac{n}{m} \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{1}{m} fA}{(1+r)^{\frac{i}{m}}} + \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}}}}. \qquad (11.17)$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{m} \frac{A}{(1+r)^{\frac{n}{m}}} = 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} i p^i}{\sum_{i=1}^{\infty} p^i},$$

где $p = \frac{1}{(1+r)^{\frac{1}{m}}} < 1$. Поскольку $\sum_{i=1}^{\infty} i p^i = \frac{p}{(1-p)^2}$, $\sum_{i=1}^{\infty} p^i = \frac{p}{1-p}$, то получаем

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \frac{1}{m} \frac{1}{(1-p)} = \frac{\frac{1}{m}(1+r)^{\frac{1}{m}}}{(1+r)^{\frac{1}{m}} - 1}.$$

Так как обычно r мало, то

$$(1+r)^{\frac{1}{m}} \approx 1 + \frac{r}{m}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} D_n \approx \frac{r+m}{rm}. \qquad (11.18)$$

Заметим, что значение предела не зависит от купонной ставки облигации.

6*b*. Пусть $f \geq r$. Для простоты будем считать, что платежи по облигации выплачиваются раз в год (m = 1) и до ее погашения остается n лет (τ = 0). Тогда дюрация купонной облигации равна

$$D_n = \frac{fA\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(1+r)^i} + n\frac{A}{(1+r)^n}}{fA\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^i} + \frac{A}{(1+r)^n}}.$$

Используем обозначение $p = \frac{1}{1+r}$. Тогда

$$D_n = \frac{f\sum_{i=1}^{n} ip^i + np^n}{f\sum_{i=1}^{n} p^i + p^n}.$$

Так как $\sum_{i=1}^{n} ip^i = \frac{p}{(1-p)^2} - \frac{p^{n+1}}{(1-p)^2} - \frac{np^{n+1}}{1-p}$, $\sum_{i=1}^{n} p^i = \frac{p-p^{n+1}}{1-p}$, то

$$D_n = \frac{f - fp^n + np^{n-1}a}{f(1-p) + p^{n-1}a},$$

где $a = (1-p)(1-p-fp)$. Покажем, что $D_{n+1} > D_n$.

Рассмотрим разность

$$D_{n+1} - D_n = \frac{f - fp^{n+1} + (n+1)p^n a}{f(1-p) + p^n a} - \frac{f - fp^n + np^{n-1}a}{f(1-p) + p^{n-1}a} =$$

$$= \frac{1}{\left(f(1-p) + p^n a\right)\left(f(1-p) + p^{n-1}a\right)} B,$$

где $B = f^2(1-p)^2 p^n + fap^{n-1}(1-p) + fap^{n-1}(1-p)((n+1)p - n) + a^2 p^{2n-1}$.

Покажем, что B > 0. Используем метод математической индукции по числу оставшихся до погашения облигации купонных платежей.

Основание индукции n = 0. Тогда

$$B = f^2(1-p)^2 + \frac{fa}{p}(1-p) + fa(1-p) + \frac{a^2}{p} =$$

$$= (f(1-p) + a)(f(1-p) + \frac{a}{p}) = \frac{1}{p}(1-p)^4(1+f) > 0.$$

Заметим, что при $n = 0$ разность $D_1 - D_0 = 1$, т.к. $D_1 = 1$ - дюрация облигации за год до погашения, когда она уже является чисто дисконтной, $D_0 = 0$ - дюрация облигации в день погашения сразу после купонной выплаты.

Предположим, что $B > 0$ при $n = k$, т.е.

$$B_k = f^2(1-p)^2 p^k + fap^{k-1}(1-p) + fap^{k-1}(1-p)((k+1)p-k) + a^2 p^{2k-1} > 0.$$

Пусть теперь $n = k + 1$. Рассмотрим

$$B_{k+1} = f^2(1-p)^2 p^{k+1} + fap^k(1-p) + fap^k(1-p)(((k+1)+1)p-(k+1)) + a^2 p^{2k+1} =$$

$$= p\left[f^2(1-p)^2 p^k + fap^{k-1}(1-p) + fap^{k-1}(1-p)(((k+1)p-k)+(p-1)) + a^2 p^{2k}\right] =$$

$$= p\left[f^2(1-p)^2 p^k + fap^{k-1}(1-p) + fap^{k-1}(1-p)((k+1)p-k) + a^2 p^{2k-1}\right] +$$

$$+ p\left[fap^{k-1}(1-p)(p-1) + a^2 p^{2k} - a^2 p^{2k-1}\right] = pB_k + pr_k.$$

По предположению индукции $B_k > 0$.

$$r_k = -ap^{k-1}(1-p)\left(f(1-p) + ap^k\right) = -ap^{k-1}(1-p)^2\left(f + (1-p-pf)p^k\right) =$$

$$= -ap^{k-1}(1-p)^2\left(f(1-p^{k+1}) + p^k(1-p)\right) \geq 0,$$

так как $p = \dfrac{1}{1+r} < 1$, $1-p > 0$, $1-p^{k+1} > 0$, $a = (1-p)(1-p-pf) = (1-p)\dfrac{r-f}{1+r} \leq 0$ при $f \geq r$.

Следовательно, $B_{k+1} > 0$. Отсюда $B > 0$ для любого целого неотрицательного n. Значит, $D_{n+1} - D_n > 0$. Утверждение доказано.

На рис. 1.11.2 показана зависимость дюрации облигации от срока до погашения при $f \geq r$, $m = 1$, $\tau = 0$.

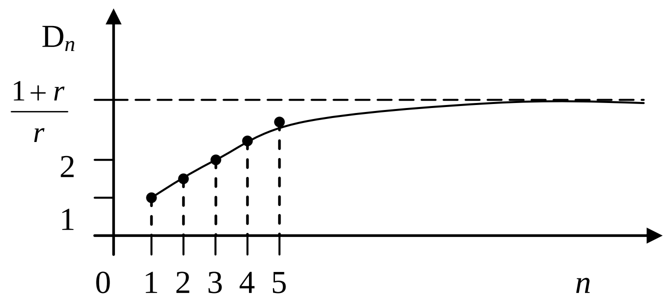


Рис. 1.11.2

6*c*. Пусть $f < r$. Дюрация купонной облигации, платежи по которой выплачиваются раз в год (m = 1) и до погашения остается n лет (τ = 0), равна

$$D_n = \frac{fA\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{(1+r)^i} + n\frac{A}{(1+r)^n}}{fA\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^i} + \frac{A}{(1+r)^n}}.$$

Рассмотрим разность

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{\left(f(1-p)+p^n a\right)\left(f(1-p)+p^{n-1}a\right)}B,$$

где

$$B = f^2(1-p)^2 p^n + fap^{n-1}(1-p) + fap^{n-1}(1-p)((n+1)p-n) + a^2 p^{2n-1},$$

$$a = (1-p)(1-p-fp), \quad p = \frac{1}{1+r}.$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$B = p^{n+1}(1-p)^2\left\{fr\left[(f-r)(n-\frac{1}{r})+(1+r)\right]+(r-f)^2 p^n\right\}. \quad (11.19)$$

Легко убедиться, что если $n < \frac{1}{r}$, то $B > 0$ (следовательно $D_{n+1} - D_n > 0$). С другой стороны, если n достаточно велико, например $n = \frac{1}{r} + \frac{r+1}{r-f} + \frac{r-f}{rf}$, то $B < 0$ (следовательно, $D_{n+1} - D_n < 0$). Действительно,

$$B = p^{n+1}(1-p)^2\left\{fr\left[(f-r)(n-\frac{1}{r})+(1+r)\right]+(r-f)^2 p^n\right\}\Bigg|_{n=\frac{1}{r}+\frac{r+1}{r-f}+\frac{r-f}{rf}} =$$

$$= -p^{n+1}(1-p)^2(r-f)^2(1-p^n) < 0.$$

Следовательно, существует срок, когда разность $D_{n+1} - D_n$ изменяет знак. В качестве приближенного значения такого срока можно взять $n_0 = \left[\frac{1}{r}+\frac{1+r}{r-f}\right]$ (целую часть). Число $\frac{1}{r}+\frac{r+1}{r-f}$ получено при условии, что $D_{n+1} - D_n \approx 0$, когда выражение в квадратных скобках в (11.19) равно нулю. Равенство является приближенным с точностью до $\left(\frac{r-f}{f}\right)^2\frac{1}{(1+r)^{2n_0}}$. Следовательно, чем ближе значения r и f, тем точнее полученное данным методом значение n_0, что и подтверждается расчетами для r = 25% и ряда значений f.

f	$\frac{1}{r}+\frac{r+1}{r-f}$	$n_0 = \left[\frac{1}{r}+\frac{1+r}{r-f}\right]$ (лет)	Значение n (лет), при котором D_{n+1} - D_n меняет знак (точное)
3 %	9,7	9	12
5 %	10,3	10	12
10 %	12,3	12	13
15 %	16,5	16	17
20 %	29,0	29	30
23 %	66,5	66	67
24 %	129,0	129	129

Из выражения для n_0 следует, что чем ближе значения r и f, тем больше срок n_0. Кроме того, несложно убедиться, что чем больше купонная ставка f, тем больше n_0. Эти выводы подтверждаются приведенными расчетами. Элементы последнего столбца в этой таблице получены из непосредственных вычислений дюрации облигации для различных значений n по формуле (11.17). Пример таких вычислений для купонных ставок $f_1 = 5\%$ и $f_2 = 10\%$ показан в следующей таблице:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D_{f1}	1	1,94	2,82	3,60	4,29	4,87	5,34	5,70	5,96	6,13	6,21	6,24	6,22	6,16	6,08
D_{f2}	1	1,90	2,68	3,35	3,90	4,34	4,68	4,93	5,11	5,23	5,30	5,34	5,36	5,35	5,33

Покажем, что если $f < r$, то $D_{n+1} > D_n$ для любого $n < n_0$.

Имеем

$$D_{n+1} - D_n = \frac{1}{\left(f(1-p) + p^n a\right)\left(f(1-p) + p^{n-1} a\right)} B,$$

где

$$B = p^{n+1}(1-p)^2 \left\{ fr\left[(f-r)(n - \frac{1}{r}) + (1+r) \right] + (r-f)^2 p^n \right\}.$$

Установим знак B при условии $n < n_0$.

$$B = p^{n+1}(1-p)^2 \left\{ fr(r-f)\left(-n + \frac{1}{r} + \frac{1+r}{r-f} \right) + (r-f)^2 p^n \right\} >$$

$$> p^{n+1}(1-p)^2 \left\{ fr(r-f)\left(-n + \left[\frac{1}{r} + \frac{1+r}{r-f} \right] \right) + (r-f)^2 p^n \right\} =$$

$$= p^{n+1}(1-p)^2 \left\{ fr(r-f)\left(-n + n_0\right) + (r-f)^2 p^n \right\} > 0 ,$$

так как $f < r$ и $n < n_0$. Значит $D_{n+1} > D_n$.

Следовательно, если $f < r$, то можно указать число n_0 такое, что для облигаций с числом периодов до погашения $n < n_0$ последовательность $\{D_n\}$ является возрастающей. Таким образом, если облигации A_1, A_2, …, A_k продаются с дисконтом и число периодов до их погашения $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_0$, то при прочих равных условиях $D_{n1} < D_{n2} < \ldots < D_{n_k} < D_{n_0}$, где D_{n1}, D_{n2}, …, D_{n_k} – дюрации этих облигаций.

Покажем, что значение дюрации D_{n_0} облигации со сроком погашения n_0 удовлетворяет неравенству $D_{n_0} > \frac{r+1}{r}$, где $\frac{r+1}{r} = \lim\limits_{n\to\infty} D_n$ при $m = 1$ (см. пункт **6*a***). Предположим противное. Пусть $D_{n_0} \le \frac{r+1}{r}$. Следовательно $\frac{f - fp^{n_0} + n_0 p^{n_0-1}a}{f(1-p) + p^{n_0-1}a} \le \frac{r+1}{r}$. Отсюда, учитывая, что $a = (1-p)(1-p-pf) = (1-p)\frac{r-f}{1+r} > 0$ при $f < r$, получаем $n_0 \le \frac{1+r}{r-f}$. Противоречие, так как $n_0 = \left[\frac{1}{r} + \frac{1+r}{r-f}\right]$. Следовательно, при $f < r$ характер зависимости дюрации облигации от срока до погашения имеет вид, показанный на рисунке 1.11.3. На этом рисунке показана зависимость дюрации облигации от срока до погашения для купонных ставок $f_1 < f_2 < r$.

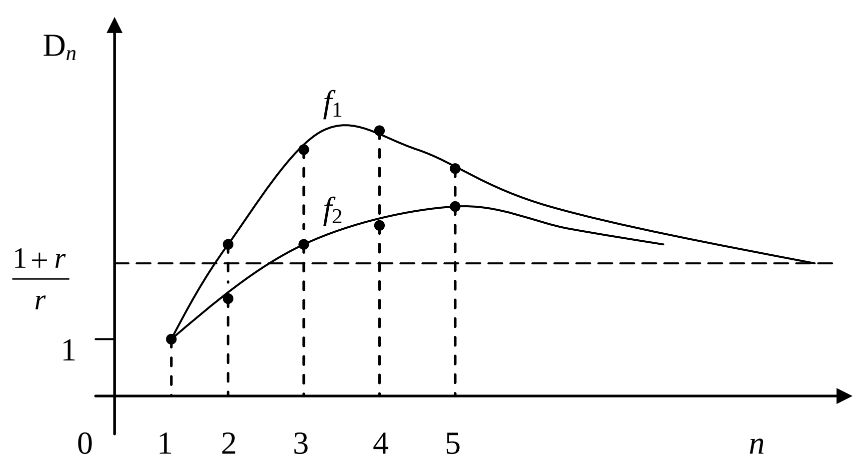


Рис. 1.11.3.

1.12. Временная зависимость стоимости инвестиции в облигацию. Иммунизирующее свойство дюрации облигации.

До сих пор мы обсуждали рыночную цену облигации в момент $t = 0$ – момент покупки облигации. Рассмотрено влияние трех важнейших факторов на цену облигации – внутренней доходности, купонной ставки, срока до погашения. Установлено, что мерой чувствительности цены облигации к изменению процентных ставок на рынке является дюрация облигации, а показатель выпуклости показывает насколько точно дюрация оценивает эту чувствительность.

Проблема оценки облигации существует не только тогда, когда облигация покупается или продается на рынке, но и когда она находится у владельца. Для оценки стоимости облигации через t лет после покупки, где $t \in [0, T]$, T лет – срок до погашения облигации, используется понятие стоимости инвестиции в момент t.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1, t_2, \ldots, t_n = T$ лет от текущего момента времени $t = 0$ обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2, \ldots, C_n$ соответственно.

Определение. Стоимость инвестиции в облигацию в момент $t \in [0, T]$ – это стоимость потока платежей по облигации $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в момент t.

Напомним, что определение стоимости потока платежей в момент t приведено в параграфе 1.4. Обозначим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки через $P(t)$. Как следует из определения, $P(t)$ - это сумма всех членов потока платежей по облигации, приведенных к моменту времени t. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n$ – моменты поступления платежей $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n$ соответственно и $t \in [t_m, t_{m+1}]$. Тогда

$$P(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k F(t_k, t) + \sum_{k=m+1}^{n} C_k \nu(t, t_k), \qquad (12.1)$$

где $F(t_k, t)$ - множитель наращения k – го платежа на временном отрезке $[t_k, t]$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $\nu(t, t_k)$ - дисконтный множитель k – го платежа на отрезке $[t, t_k]$, $k = m + 1, \ldots, n$.

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию в момент t имеет две составляющие – результат реинвестирования поступивших до момента t платежей по облигации:

$$R_t = \sum_{k=1}^{m} C_k F(t_k, t)$$

и рыночную цену облигации в момент t:

$$P_t = \sum_{k=m+1}^{n} C_k \nu(t, t_k).$$

Как следует из этих выражений, стоимость инвестиции в момент $t = 0$ - это рыночная цена покупки облигации, т.е. $P(0) = P$.

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки получают, исходя из следующих предположений:

1) все платежи, полученные от облигации до момента t, реинвестируются;

2) в момент t облигации данного выпуска имеются на рынке. Облигация, купленная t лет назад, может быть продана на рынке по существующей на этот момент времени рыночной цене P_t.

Тогда

$$P(t) = R_t + P_t\,. \qquad (12.2)$$

Очевидно, что R_t определяется набором годовых безрисковых ставок для инвестиций на сроки $(t - t_1)$, $(t - t_2)$ лет и т.д. для всех платежей по облигации до момента t. Рыночная цена P_t определяется количеством оставшихся до погашения платежей по облигации и временной структурой процентных ставок на момент t по временному диапазону $(T - t)$ лет.

Рассмотрим облигацию, по которой через $t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots, t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$ обещают выплатить денежные суммы $C_1, C_2, \ldots, C_m, C_{m+1}, \ldots, C_n$ соответственно. Пусть $t \in [t_m, t_{m+1}]$. Тогда

$$R_t = C_1(1 + r(t - t_1))^{t - t_1} + \ldots + C_m(1 + r(t - t_m))^{t - t_m}, \qquad (12.3)$$

$$P_t = \frac{C_{m+1}}{(1 + r(t_{m+1} - t))^{t_{m+1} - t}} + \ldots + \frac{C_n}{(1 + r(t_n - t))^{t_n - t}}, \qquad (12.4)$$

где $r(t - t_1)$, …, $r(t - t_m)$ – годовые безрисковые процентные ставки для инвестирования на $(t - t_1)$, …, $(t - t_m)$ лет соответственно в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_m$; $r(t_{m+1} - t)$, …, $r(t_n - t)$ – годовые безрисковые процентные ставки для инвестирования на $(t_{m+1} - t)$, …, $(t_n - t)$ лет соответственно в момент t.

Пример 12.1. Дана облигация со следующим потоком платежей на момент покупки ($t = 0$):

Срок, годы	1	2	3	4	5	6
Платеж, д.е.	20	20	20	15	15	135

Определить стоимость инвестиции в эту облигацию через 3,5 года после покупки для безрисковых процентных ставок, приведенных в таблице:

Ставка, %	17	16	15	15	15,5	16
Срок инвестирования, годы	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2,5
Момент инвестирования	1	2	3	3,5	3,5	3,5

Результат реинвестирования поступивших до момента t = 3,5 платежей по облигации составляет

$$R_t = 20(1 + 0,17)^{2,5} + 20(1 + 0,16)^{1,5} + 20(1 + 0,15)^{0,5} = 76,0486 \text{ (д.е.)}$$

Рыночная стоимость облигации через 3,5 года после ее покупки будет

$$P_t = \frac{15}{(1+0,15)^{0,5}} + \frac{15}{(1+0,155)^{1,5}} + \frac{135}{(1+0,16)^{2,5}} = 119,2231 \text{(д.е.)}$$

Таким образом, стоимость инвестиции в облигацию через 3,5 года после ее покупки составит 76,0486 + 119,2231 = 195,2717 (д.е.).

Теперь предположим, что в момент покупки облигации t = 0 временная структура процентных ставок такова, что безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Рассмотрим стоимость инвестиции в облигацию через t лет после покупки для двух случаев:

1) временная структура процентных ставок остается неизменной до погашения облигации;

2) сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину и стали равными $\tilde{r}$, а затем уже не менялись.

Стоимость инвестиции в облигацию в момент t в первом случае называют **планируемой** и обозначают через $P(r,t)$, во втором случае – **фактической** и обозначают через $P(\tilde{r}, t)$.

Свойства планируемой и фактической стоимостей инвестиции.

1. $P(r, t)$ и $P(\tilde{r}, t)$ – непрерывные возрастающие функции времени:

$$P(r, t) = P(r)(1+r)^t , \qquad (12.5)$$

$$P(\tilde{r}, t) = P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^t . \qquad (12.6)$$

Действительно, согласно (12.2),

$$P(r, t) = R_t(r) + P_t(r).$$

Здесь $R_t(r)$ – результат реинвестирования на момент t поступивших до этого момента платежей от облигации по ставке r, $P_t(r)$ – планируемая рыночная цена облигации через t лет после покупки. Пусть $t_1, t_2,\ldots, t_m, t_{m+1},\ldots, t_n$ – моменты поступления платежей $C_1, C_2,\ldots, C_m , C_{m+1},\ldots, C_n$ соответственно и $t \in [t_m, t_{m+1}]$. Тогда планируемая стоимость инвестиции

$$P(r, t) = C_1(1+r)^{t-t_1} + \ldots + C_m(1+r)^{t-t_m} + \frac{C_{m+1}}{(1+r)^{t_{m+1}-t}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n - t}} =$$

$$= (1+r)^t\left(\frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}\right) = (1+r)^t P(r) .$$

Здесь

$$P(r) = \frac{C_1}{(1+r)^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^{t_n}}$$

– рыночная цена покупки облигации в момент $t = 0$, соответствующая существующей на этот момент времени временной структуре процентных ставок.

Фактическая стоимость инвестиции в момент t согласно (12.2), равна

$$P(\tilde{r}, t) = R_t(\tilde{r}) + P_t(\tilde{r}).$$

Здесь $R_t(\tilde{r})$ – результат реинвестирования на момент t поступивших до этого момента платежей от облигации по ставке $\tilde{r}$, $P_t(\tilde{r})$ – фактическая рыночная цена облигации через t лет после покупки. Выражение (12.6) для фактической стоимости инвестиции получаем аналогично:

$$P(\tilde{r}\,,t) = C_1(1+\tilde{r})^{t-t_1} + \ldots + C_m(1+\tilde{r})^{t-t_m} + \frac{C_{m+1}}{(1+\tilde{r})^{t_{m+1}-t}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+\tilde{r})^{t_n-t}} =$$

$$= (1+\tilde{r})^t \left(\frac{C_1}{(1+\tilde{r})^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+\tilde{r})^{t_n}} \right) = (1+\tilde{r})^t P(\tilde{r}) \ .$$

Здесь

$$P(\tilde{r}\,) = \frac{C_1}{(1+\tilde{r})^{t_1}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+\tilde{r})^{t_n}}$$

– оценка облигации на момент $t = 0$, соответствующая новой временной структуре процентных ставок сразу после покупки облигации.

(12.5) и (12.6) – это показательные функции времени, основания которых больше единицы. Из элементарной математики известно, что такая функция является непрерывной и возрастающей.

2. Существует и притом единственный момент времени t^*, когда фактическая стоимость инвестиции равна планируемой.

Доказательство. Пусть $\tilde{r} > r$. Рассмотрим момент $t = 0$. Тогда $P(\tilde{r}\,) < P(r)$ (см. зависимость цена – доходность, теорема 9.1), или

$$P(\tilde{r}\,, 0) < P(r, 0). \qquad (12.7)$$

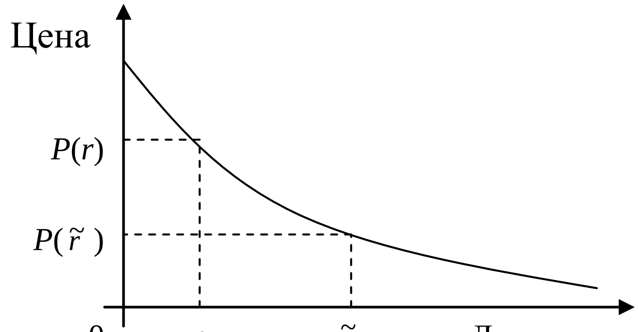


Рис. 1.12.1

Рассмотрим теперь момент погашения облигации $t = t_n$. Тогда

$$P(r, t_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+r)^{t_n - t_i},$$

$$P(\tilde{r}, t_n) = \sum_{i=1}^{n} C_i (1+\tilde{r})^{t_n - t_i}.$$

Так как $\tilde{r} > r$, то

$$P(\tilde{r}, t_n) > P(r, t_n). \qquad (12.8)$$

Из неравенств (12.7) и (12.8) следует, что существует такой момент времени t^*, когда $P(\tilde{r}, t^*) = P(r, t^*)$. Покажем, что момент t^* является единственным. Предположим, что равенство стоимостей достигается в точках τ_1 и τ_2. Следовательно

$$P(\tilde{r}, \tau_1) = P(r, \tau_1) \quad \text{и} \quad P(\tilde{r}, \tau_2) = P(r, \tau_2).$$

$$P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^{\tau_1} = P(r)(1+r)^{\tau_1} \quad \text{и} \quad P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^{\tau_2} = P(r)(1+r)^{\tau_2}.$$

Тогда

$$\left(\frac{1+\tilde{r}}{1+r}\right)^{\tau_1} = \left(\frac{1+\tilde{r}}{1+r}\right)^{\tau_2}.$$

Отсюда $\tau_1 = \tau_2 = t^*$.

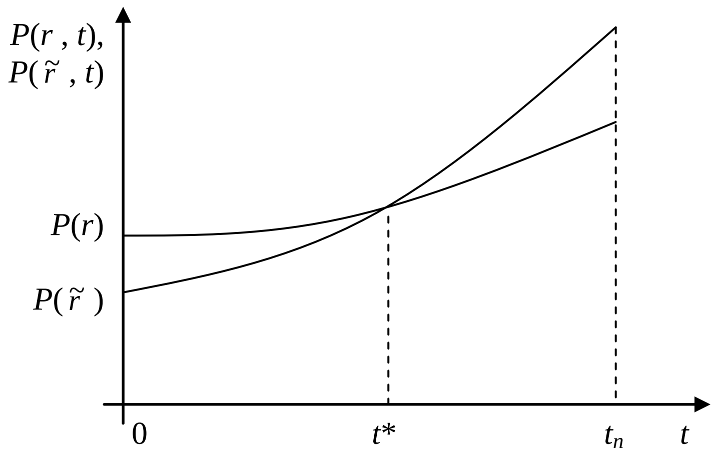


Рис. 1.12.2

Случай, когда $\tilde{r} < r$, доказывается аналогично. Найдем t^*.

$$P(\tilde{r}, t^*) = P(r, t^*),$$

$$P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^{t^*} = P(r)(1+r)^{t^*},$$

$$\left(\frac{1+\tilde{r}}{1+r}\right)^{t^*} = \frac{P(r)}{P(\tilde{r})}.$$

Отсюда

$$t^* = \frac{\ln\left(\dfrac{P(r)}{P(\tilde{r})}\right)}{\ln\left(\dfrac{1+\tilde{r}}{1+r}\right)}. \qquad (12.9)$$

3. Теорема 12.1 (об иммунизирующем свойстве дюрации облигации). Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент $t = 0$, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, $t = D$, фактическая стоимость инвестиции в облигацию не меньше планируемой, т.е.

$$P(\tilde{r}, D) \geq P(r, D) \qquad (12.10)$$

для любых значений $\tilde{r}$.

Доказательство. Если после покупки облигации временная структура процентных ставок не изменилась, то $\tilde{r} = r$ и $P(\tilde{r}, D) = P(r, D)$.

Если сразу после покупки облигации безрисковые процентные ставки изменились и стали равными $\tilde{r}$, то в момент $t = D$ фактическая стоимость инвестиции в облигацию $P(\tilde{r}, D)$ является функцией $\tilde{r}$. Согласно (12.6),

$$P(\tilde{r}, D) = P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^D .$$

Продифференцируем это выражение по $\tilde{r}$:

$$\left(P(\tilde{r}, D)\right)' = P'(\tilde{r})(1+\tilde{r})^D + P(\tilde{r})D(1+\tilde{r})^{D-1} .$$

Так как $\dfrac{P'(\tilde{r})}{P(\tilde{r})} = -D(\tilde{r})\dfrac{1}{1+\tilde{r}}$ (см. параграф 1.11), то

$$\left(P(\tilde{r}, D)\right)' = P(\tilde{r})(1+\tilde{r})^{D-1}\left(D - D(\tilde{r})\right).$$

Пусть $\tilde{r} > r$. Тогда по свойству 3 дюрации облигации $D(\tilde{r}) < D(r) = D$. Отсюда $P(\tilde{r}, D)' > 0$. Значит, $P(\tilde{r}, D)$ – возрастающая функция $\tilde{r}$. Следовательно,

$$P(r, D) < P(\tilde{r}, D).$$

Если $\tilde{r} < r$, то $D(\tilde{r}) > D(r) = D$. Тогда $P(\tilde{r}, D)' < 0$. Значит, $P(\tilde{r}, D)$ – убывающая функция $\tilde{r}$. Следовательно,

$$P(\tilde{r}, D) > P(r, D). \qquad (12.11)$$

Таким образом, при любых значениях $\tilde{r}$ выполняется неравенство (12.10). Заметим, что при $\tilde{r} \neq r$ неравенство является строгим, т.е. имеет вид (12.11). Теорема доказана.

Замечание. На основании доказанной теоремы можно сформулировать **иммунизирующее свойство дюрации** облигации. Пусть в момент инвестирования $t = 0$ безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы. Тогда в момент времени, равный дюрации облигации, инвестиция в облигацию иммунизирована (защищена) против изменений безрисковых процентных ставок сразу после t = 0 на одну и ту же величину (или до момента t_1 – первого платежа по облигации, в чем несложно убедиться). Таким образом, иммунизирующее свойство дюрации облигации имеет место при условии горизонтальности кривой доходностей и параллельности ее сдвигов.

Следствие. Пусть $D = D(r)$ – дюрация облигации в момент $t = 0$, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r, а r_1 и r_2 – безрисковые процентные ставки сразу после $t = 0$. Тогда если $r_1 < r < r_2$, то

$$t^*(r_2) < D < t^*(r_1). \qquad (12.12)$$

Доказательство. Рассмотрим $r_1 < r$. Согласно теореме

$$P(r_1, D) > P(r, D).$$

Так как $P(r_1, D) = P(r_1)(1 + r_1)^D$ и $P(r, D) = P(r)(1 + r)^D$, то

$$P(r_1)(1 + r_1)^D > P(r)(1 + r)^D.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right)^D > \frac{P(r)}{P(r_1)},$$

$$D\ln\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right) > \ln\left(\frac{P(r)}{P(r_1)}\right).$$

Так как $r_1 < r$, то $P(r_1) > P(r)$, $\ln\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right) < 0$, $\ln\left(\frac{P(r)}{P(r_1)}\right) < 0$. Тогда

$$D < \frac{\ln\left(\frac{P(r)}{P(r_1)}\right)}{\ln\left(\frac{1+r_1}{1+r}\right)} = t^*(r_1).$$

Аналогично доказывается вторая часть неравенства (12.12).

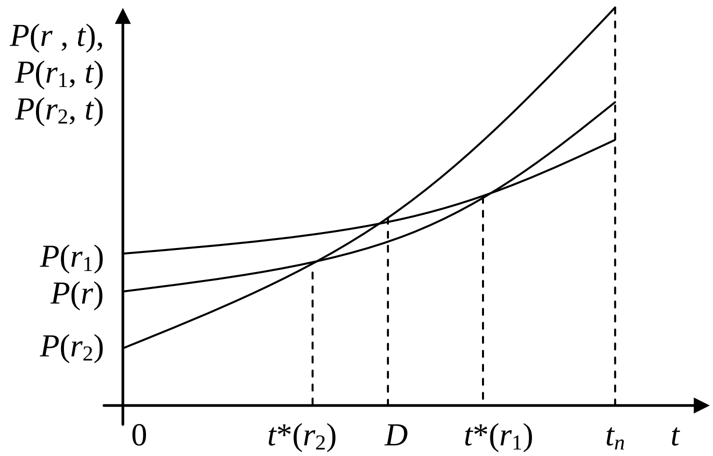


Рис. 1.12.3

Пример 12.2. Дана 10% - ная купонная облигация номиналом 100 д.е., по которой ежегодно обещают производить купонные выплаты в течение трех лет. Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10% годовых. Сразу после покупки облигации процентные ставки а) снизились до 9% годовых; б) увеличились до 11 % годовых. Найти:

1) планируемую и фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации;

2) моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают.

В таблице приведены расчеты цены $P(r)$ и дюрации облигации $D = D(r)$ на момент покупки облигации, где r = 10% годовых, а также величин $P(r_1)$ и $P(r_2)$, где r_1 = 9%, r_2 = 11% годовых.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа С$_i$	С$_i$(0)			$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$
			r = 0,1	r_1 = 0,09	r_2 = 0,11		
1	1	10	9,0909	9,1743	9,0090	0,09091	0,09091
2	2	10	8,2645	8,4168	8,1162	0,08264	0,16529
3	3	110	82,6446	84,9402	80,4311	0,82645	2,47934
		Сумма	100,0000	102,5313	97,5563	1,00000	2,73554

Таким образом, дюрация облигации в момент ее покупки D = 2,73554 лет. Цена покупки $P(0{,}1) = 100{,}00$ д.е. Величины $P(0{,}09) = 102{,}5313$ д.е. и $P(0{,}11) = 97{,}5563$ д.е. – оценки облигации на момент $t = 0$, соответствующие новой временной структуре процентных ставок после $t = 0$. Тогда планируемая стоимость инвестиции в облигацию на момент времени $t = D$ равна

$$P(0{,}1;\, D) = P(0{,}1)(1 + 0{,}1)^D = 129{,}7870.$$

Фактические стоимости

$$P(0{,}09;\, D) = P(0{,}09)(1 + 0{,}09)^D = 129{,}7891.$$

$$P(0{,}11;\, D) = P(0{,}11)(1 + 0{,}11)^D = 129{,}7891.$$

В обоих случаях фактическая стоимость инвестиции в момент $t = D$ больше планируемой. В первом случае в момент $t = D$ снижение ставки реинвестирования компенсировано ростом рыночной цены облигации в момент $t = D$ по сравнению с планируемой. Во втором случае снижение рыночной цены в момент $t = D$ вследствие роста процентных ставок компенсировано возросшей ставкой реинвестирования по сравнению с планируемой.

2) Моменты времени, когда планируемая и фактическая стоимости инвестиции совпадают, равны соответственно

$$t^*(0{,}09) = \frac{\ln\left(\frac{P(0{,}1)}{P(0{,}09)}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}09}{1{,}1}\right)} = 2{,}73726$$

$$t^*(0{,}11) = \frac{\ln\left(\frac{P(0{,}1)}{P(0{,}11)}\right)}{\ln\left(\frac{1{,}11}{1{,}1}\right)} = 2{,}73381.$$

Таким образом, $t^*(0{,}11) < D < t^*(0{,}09)$.

1.13. Инвестиции в портфель облигаций.

Дюрация и показатель выпуклости портфеля.

Рассмотрим портфель из облигаций, не имеющих кредитного риска. Риск неплатежа от портфеля отсутствует. Однако в условиях рынка остается процентный риск. Изменение процентных ставок на рынке вызывает изменение рыночных цен облигаций, входящих в портфель, а следовательно, изменение стоимости всего портфеля.

Предположим, на рынке имеются облигации без кредитного риска m видов, цены которых в момент $t = 0$ равны соответственно P_1, $P_2, \ldots, P_m$. Предположим также, что на рынке можно купить любое количество облигаций, в том числе нецелое. Пусть Ω_j – сумма, затраченная инвестором на приобретение облигаций j – го вида, $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда в момент $t = 0$ сформирован портфель облигаций $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m)$, стоимость которого равна $\Omega = \sum_{j=1}^{m} \Omega_j$. $k_j = \frac{\Omega_j}{P_j}$ и $\omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega}$ – соответственно количество и доля облигаций j – го вида в портфеле, $j = 1, 2, \ldots, m$. Следовательно, $\sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1$. Пусть через t_1, $t_2, \ldots,$ t_n лет от момента $t = 0$ производится платеж хотя бы по одному виду облигаций, входящих в портфель. Обозначим через C_i^j платеж по облигации j – го вида в момент t_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $R_1, R_2, \ldots, R_n$ в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – ожидаемый поток платежей от портфеля, где

$$R_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\Omega_j}{P_j} C_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (13.1)$$

Таким образом, портфель $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m)$ в момент $t = 0$ можно рассматривать как одну облигацию без кредитного риска стоимостью Ω с потоком платежей $R_1, R_2, \ldots, R_n$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$. По своим инвестиционным качествам портфель эквивалентен такой облигации.

Пример 13.1. Сформирован портфель П(2000, 3000, 2000) из облигаций трех видов, потоки платежей по которым указаны в таблице. Определить поток платежей от этого портфеля.

Облигация	Платеж, д.е.				
	Срок, годы				
	0	0,5	1	1,5	2
B_1	- 850				1035
B_2	- 290	10	10	330	
B_3	- 990		90		1100

Согласно условию, $P_1 = 850$, $P_2 = 290$, $P_3 = 990$; $\Omega_1 = 2000$, $\Omega_2 = 3000$, $\Omega_3 = 2000$. Члены потока платежей от портфеля рассчитаем по (13.1):

$R_1 = \frac{3000}{290} \cdot 10 = 103{,}448$ в момент $t_1 = 0{,}5$.

$R_2 = \frac{3000}{290} \cdot 10 + \frac{2000}{990} \cdot 90 = 285{,}266$ в момент $t_2 = 1$.

$R_3 = \frac{3000}{290} \cdot 330 = 3413{,}793$ в момент $t_3 = 1{,}5$.

$R_4 = \frac{2000}{850} \cdot 1035 + \frac{2000}{990} \cdot 1100 = 4657{,}516$ в момент $t_4 = 2$.

Таким образом, поток платежей от портфеля П(2000, 3000, 2000) имеет вид, показанный в таблице:

Срок, годы	0	0,5	1	1,5	2
Платеж, д.е.	- 7000	103,448	285,266	3413,793	4657,516

Меры доходности портфеля.

Для вычисления доходности портфеля П(Ω_1, Ω_2,…, Ω_m) приняты две характеристики:

1) средневзвешенная доходность портфеля $r_{ср.}$; 2) внутренняя ставка доходности r_P .

Средневзвешенная доходность портфеля определяется путем усреднения доходностей по всем облигациям в портфеле:

$$r_{ср.} = \sum_{j=1}^{m} \omega_j r_j \quad . \qquad (13.2)$$

Здесь $\omega_j = \dfrac{\Omega_j}{\Omega}$ – доля облигаций j – го вида в портфеле, r_j – их внутренняя доходность. Недостатком этой характеристики является то, что она несет мало информации о потенциальной доходности портфеля.

Внутренняя ставка доходности r_P – это процентная ставка, по которой приведенная стоимость потока платежей по портфелю R_1, R_2, …, R_n в моменты t_1 , t_2,…, t_n равна его рыночной цене Ω в момент t = 0:

$$\Omega = \frac{R_1}{(1+r_P)^{t_1}} + \ldots + \frac{R_n}{(1+r_P)^{t_n}} \; . \qquad (13.3)$$

Внутренняя ставка доходности портфеля, хотя и лучше, чем средневзвешенная доходность портфеля, но имеет те же недостатки, что и внутренняя доходность облигации. Она предполагает, что платежи по портфелю реинвестируются по ставке, равной r_P, а сам портфель держится до погашения. Например, если одна из облигаций в порфеле погашается через 30 лет, то предполагается, что портфель держится 30 лет и все промежуточные платежи (купонные выплаты и погашаемые номиналы) реинвестируются.

Пример 13.2. Для портфеля облигаций П(2000, 3000, 2000) из примера 13.1 рассчитать $r_{\text{ср.}}$ и r_P.

Внутренние доходности облигаций В$_1$, В$_2$, В$_3$ равны соответственно: r_1 = 0,10347; r_2 = 0,13798; r_2 = 0,10053. Тогда согласно (13.2):

$$r_{\text{ср.}} = \frac{2000}{7000}\cdot r_1 + \frac{3000}{7000}\cdot r_2 + \frac{2000}{7000}\cdot r_3 = 0{,}11742.$$

Внутреннюю ставку доходности r_P найдем из уравнения:

$$7000 = \frac{103{,}448}{(1+r_P)^{0{,}5}} + \frac{285{,}266}{(1+r_P)} + \frac{3413{,}793}{(1+r_P)^{1{,}5}} + \frac{4657{,}516}{(1+r_P)^2}\,.$$

Методом линейной интерполяции с точностью до пятого знака после запятой получаем r_P = 0,11497.

Дюрация и показатель выпуклости портфеля облигаций.

Определение. **Дюрацией D_P и показателем выпуклости C_P портфеля облигаций П(Ω_1,Ω_2,…,Ω_m) называется дюрация и показатель выпуклости облигации, эквивалентной портфелю.**

Тогда

$$D_P = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} \ , \qquad \textbf{(13.4)}$$

$$C_P = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i\,(t_i \ + \ 1)\frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} \ , \qquad \textbf{(13.5)}$$

где r – значения годовых безрисковых процентных ставок в момент t = 0, одинаковые для всех сроков.

Свойства дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций.

1. **Для дюрации и показателя выпуклости портфеля облигаций $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m)$ справедливы равенства:**

$$D_P \ = \ \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j \ , \qquad \textbf{(13.6)}$$

$$C_P \ = \ \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j \ , \qquad \textbf{(13.7)}$$

где $\omega_j = \dfrac{\Omega_j}{\Omega}$ **– доля облигаций j – го вида в портфеле, D_j и C_j – дюрация и показатель выпуклости облигаций j – го вида.**

Доказательство. **Согласно определению,**

$$D_P = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} \ = \ \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{(1+r)^{t_i}} \cdot \sum_{j=1}^{m} \frac{\Omega_j}{P_j} C_i^j \ =$$

$$= \ \sum_{j=1}^{m} \frac{\Omega_j}{\Omega}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}}\right) = \ \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j \ ,$$

где использовано выражение (13.1) для членов потока платежей от портфеля.

Аналогично для показателя выпуклости:

$$C_P = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i + 1)\frac{R_i}{(1+r)^{t_i}} = \frac{1}{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i(t_i + 1)}{(1+r)^{t_i}} \cdot \sum_{j=1}^{m}\frac{\Omega_j}{P_j}C_i^j =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\frac{\Omega_j}{\Omega}\left(\frac{1}{P_j}\sum_{i=1}^{n} t_i(t_i + 1)\frac{C_i^j}{(1+r)^{t_i}}\right) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j C_j \text{.}$$

2. **Если D_P и C_P – дюрация и показатель выпуклости портфеля $\Pi(\Omega_1, \Omega_2,\ldots, \Omega_m)$, то**

$$\min_j\{D_j\} \le D_P \le \max_j\{D_j\},$$

$$\min_j\{C_j\} \le C_P \le \max_j\{C_j\}.$$

Действительно, $D_P = \sum_{j=1}^{m}\omega_j D_j \le \max_j\{D_j\}\sum_{j=1}^{m}\omega_j = \max_j\{D_j\}$, **так как** $\sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1$. **Одновременно** $D_P = \sum_{j=1}^{m}\omega_j D_j \ge \min_j\{D_j\}\sum_{j=1}^{m}\omega_j = \min_j\{D_j\}$. **Второе неравенство устанавливается точно также.**

3. **Если число D таково, что** $\min_j\{D_j\} \le D \le \max_j\{D_j\}$, **то всегда можно сформировать портфель, дюрация которого равна D (портфель с заранее заданным значением дюрации).**

Доказательство. **Составим систему:**

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m}\omega_j D_j = D \\ \sum_{j=1}^{m}\omega_j = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(13.8)}$$

$$\omega_j \ge 0, \quad j = 1, 2,\ldots, m.$$

Покажем, что эта система разрешима. Если $D = D_k$, где $k \in \{1, 2,\ldots, m\}$, **то решением системы является следующий набор значений:**

$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_k = 1, \ldots, \omega_m = 0$.

Если же $D_k < D < D_{k+1}$, где $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, то решением системы является набор значений:

$$\omega_1 = 0, \ldots, \omega_k = \frac{D_{k+1} - D}{D_{k+1} - D_k}, \; \omega_{k+1} = \frac{D - D_k}{D_{k+1} - D_k}, \ldots, \omega_m = 0.$$

4. **Пусть в момент формирования портфеля $t = 0$ безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Если сразу после формирования портфеля процентные ставки для всех сроков мгновенно изменились на одну и ту же величину Δr, то относительное изменение цены портфеля приблизительно равно:**

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_P \frac{\Delta r}{1+r} \qquad \textbf{(13.9)}$$

или

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_P \frac{\Delta r}{1+r} + \frac{1}{2} C_P \left(\frac{\Delta r}{1+r}\right)^2 . \qquad \textbf{(13.10)}$$

Возможность оценить изменение цены портфеля по формулам (13.9) и (13.10) следует из того, что портфель можно рассматривать как одну облигацию, дюрация которой равна D_P, а показатель выпуклости C_P (см. формулы (11.8), (11.9) для облигации).

Из равенств (13.9) и (13.10) следует, что дюрацию портфеля облигаций D_P можно рассматривать как меру процентного риска портфеля, а показатель выпуклости C_P показывает, насколько точно дюрация оценивает этот риск. Чем меньше C_P, тем лучше D_P оценивает чувствительность цены портфеля к изменению рыночных процентных ставок. В связи с этим можно сформулировать следующую задачу: сформировать портфель облигаций с заданным значением дюрации D и наименьшим показателем выпуклости. Эта задача сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j = D \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \qquad \mathbf{(13.11)}$$

$$\omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j \quad (min)$$

5. **Если заданное значение дюрации портфеля D удовлетворяет условию**
$\min_j \{D_j\} \leq D \leq \max_j \{D_j\}$, то задача линейного программирования (13.11) разрешима.

Действительно, для разрешимости задачи линейного программирования необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых решений задачи было не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Согласно свойству 3, если число D удовлетворяет указанному двойному неравенству, то множество допустимых решений задачи (13.11) не пусто. Так как $f = \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j \geq 0$, то целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Свойство доказано.

Пусть T лет – срок, на который сформирован портфель облигаций (инвестиционный горизонт). Для оценки портфеля через t лет после покупки, где $t \in [0, T]$, используем понятие стоимости инвестиции в портфель в момент t.

Если в момент формирования портфеля $t = 0$ безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r и после покупки портфеля временная структура процентных ставок остается неизменной до окончания срока T, то $\Omega(r, t)$ – планируемая стоимость инвестиции в портфель в момент $t \in [0, T]$. Если сразу после формирования портфеля процентные ставки для всех сроков изменились на одну и ту же величину и остались на новом уровне $\tilde{r}$ в течение всего инвестиционного периода, то $\Omega(\tilde{r}, t)$ – фактическая стоимость инвестиции в портфель в момент $t \in [0, T]$. Стоимости $\Omega(r, t)$ и $\Omega(\tilde{r}, t)$ рассчитываются, исходя из тех же принципов, что и в случае облигации. Тогда

$$\Omega(r, t) = \sum_{i\,;\,t_i \leq t} R_i (1+r)^{t-t_i} + \sum_{i\,;\,t_i > t} \frac{R_i}{(1+r)^{t_i - t}}, \qquad (13.12)$$

$$\Omega(\tilde{r}, t) = \sum_{i\,;\,t_i \leq t} R_i (1+\tilde{r})^{t-t_i} + \sum_{i\,;\,t_i > t} \frac{R_i}{(1+\tilde{r})^{t_i - t}}, \qquad (13.13)$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ в моменты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – ожидаемый поток платежей от портфеля.

Таким образом,

$$\Omega(r, t) = R_t(r) + P_t(r),$$

$$\Omega(\tilde{r}, t) = R_t(\tilde{r}) + P_t(\tilde{r}),$$

где $R_t(r)$ и $R_t(\tilde{r})$ – результат реинвестирования к моменту t доходов от портфеля под ставку r или $\tilde{r}$ соответственно; $P_t(r)$ и $P_t(\tilde{r})$ – планируемая и фактическая рыночная стоимость портфеля в момент t.

$\Omega(r, t)$ и $\Omega(\tilde{r}, t)$ обладают теми же свойствами, что и планируемая и фактическая стоимости инвестиции в облигацию. Тогда

$$\Omega(r, t) = \Omega(r)(1+r)^t, \qquad (13.14)$$

$$\Omega(\tilde{r}, t) = \Omega(\tilde{r})(1+\tilde{r})^t. \qquad (13.15)$$

где $\Omega(r) = \Omega$ – цена покупки портфеля, $\Omega(\tilde{r})$ – оценка портфеля на момент $t = 0$, соответствующая новой временной структуре процентных ставок сразу после $t = 0$.

6. Иммунизирующее свойство дюрации портфеля.

Пусть $D_P = D_P(r)$ – дюрация портфеля облигаций в момент $t = 0$, когда безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r. Тогда в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_P$, фактическая стоимость инвестиции в портфель не меньше планируемой, т.е.

$$\Omega(\tilde{r}, D_P) \geq \Omega(r, D_P) \qquad (13.16)$$

для любых значений $\tilde{r}$.

Действительно, если портфель $\Pi(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m)$ эквивалентен одной облигации без кредитного риска, то иммунизирующее свойство дюрации облигации (теорема 12.1) переходит в иммунизирующее свойство дюрации портфеля.

На этом свойстве дюрации портфеля облигаций основан принцип формирования иммунизированного портфеля. В 1952 году Ф. Реддингтон, один из основателей стратегии иммунизации, впервые ввел понятие иммунизации портфеля облигаций и сформулировал условие иммунизации: для защиты стоимости портфеля от изменений рыночной процентной ставки необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом. Таким образом, чтобы сформировать иммунизированный портфель с инвестиционным горизонтом T лет, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j = T \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(13.17)}$$

$$\boldsymbol{\omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.}$$

Если срок портфеля T удовлетворяет неравенству $\min_j \{D_j\} \leq T \leq \max_j \{D_j\}$, то по свойству 3 дюрации портфеля система (13.17) разрешима. Тогда дюрация портфеля, сформированного в соответствии с решением системы (13.17), совпадает с его инвестиционным горизонтом, $D_P = T$, и по свойству 6

$$\Omega(\tilde{r}, T) \geq \Omega(r, T). \qquad (13.18).$$

Пример 13.3. Портфель формируется из купонных облигаций двух видов, характеристики которых на момент покупки портфеля (t = 0) приведены в таблице:

Облигация	A, д. е.	f	m	T, годы
A_1	100	5 %	2	2
A_2	10	8	1	2

	0	%		

В облигации первого вида инвестировано 4000 д.е., в облигации второго вида – 6000 д.е. В момент покупки портфеля безрисковые процентные ставки для инвестиций на все сроки одинаковы и равны 9% годовых. Сразу после формирования портфеля процентные ставки снизились до 8% годовых, и затем уже не изменялись. Определить:

1) поток платежей от портфеля, его дюрацию и показатель выпуклости;

2) относительное изменение цены портфеля при изменении процентных ставок на рынке с 9 до 8% годовых;

3) планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель в момент времени t = 2 года (момент погашения всех облигаций из портфеля);

4) планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель в момент времени, равный дюрации портфеля ($t = D_P$).

Решение.

1) Рассчитаем характеристики облигаций, из которых формируется портфель. В момент формирования портфеля процентные ставки для всех сроков r = 0,09 годовых.

Расчет цен облигаций, их дюраций и показателей выпуклости в момент t = 0 приведен в таблицах:

Облигация A_1.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$	$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i (t_i+1) \frac{C_i(0)}{P(r)}$
1	0,5	2,5	2,3946	0,02570	0,01285	0,01928

2	1	2,5	2,2936	0,02462	0,02462	0,04924
3	1,5	2,5	2,1968	0,02358	0,03537	0,08843
4	2	102,5	86,2722	0,92609	1,85219	5,55656
		Сумма	93,15719	1,00000	1,925032	5,71351

Облигация A_2.

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа C_i	$C_i(0)$	$\frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i \frac{C_i(0)}{P(r)}$	$t_i(t_i+1)\frac{C_i(0)}{P(r)}$
1	1	8	7,3394	0,07471	0,07471	0,14942
2	2	108	90,9014	0,92529	1,85058	5,55175
		Сумма	98,24089	1,00000	1,925291	5,70117

Таким образом, в момент $t = 0$ цены облигаций A_1 и A_2 равны соответственно $P_1 = 93{,}157$ д.е. и $P_2 = 98{,}241$ д.е., их дюрации $D_1 = 1{,}925032$ лет и $D_2 = 1{,}925291$ лет, показатели выпуклости $C_1 = 5{,}71351$ лет^2 и $C_2 = 5{,}70117$ лет^2 .

Из облигаций вида A_1 и A_2 сформирован портфель П(4000, 6000), стоимость которого равна $\Omega = 10000$ д.е. Инвестиции в облигации каждого вида $\Omega_1 = 4000$ д.е., $\Omega_2 = 6000$ д.е.

Члены потока платежей от портфеля П(4000, 6000) рассчитываются по формуле (13.1). Поток платежей от портфеля показан в таблице:

t_i, годы	0,5	1	1,5	2

Платежи, д.е.	107,345	595,940	107,345	10997,195

В следующей таблице показан расчет дюрации и показателя выпуклости этого портфеля по определению (формулы (13.4), (13.5)):

Номер платежа	Срок платежа t_i	Сумма платежа R_i	$R_i(0)$	$\frac{R_i(0)}{\Omega(r)}$	$t_i \frac{R_i(0)}{\Omega(r)}$	$t_i(t_i+1) \frac{R_i(0)}{\Omega(r)}$
1	0,5	107,345	102,82	0,01028	0,00514	0,00771
2	1	595,940	546,73	0,05467	0,05467	0,10935
3	1,5	107,345	94,33	0,00943	0,01415	0,03537
4	2	10997,195	9256,12	0,92561	1,85122	5,55367
		Сумма	10000,00	1,00000	1,925187	5,70610

Таким образом, дюрация портфеля в момент его покупки D_P = 1,925187 лет, показатель выпуклости C_P = 5,70610 лет^2 .

Рассчитаем дюрацию и показатель выпуклости портфеля П(4000, 6000) по формулам (13.6) и (13.7). Определим доли облигаций в портфеле: $\omega_j = \frac{\Omega_j}{\Omega}$, j = 1, 2. Согласно условию задачи, Ω_1 = 4000 д.е., Ω_2 = 6000 д.е., Ω = 10000 д.е. Тогда

$$D_P = \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j = 0{,}4 \cdot D_1 + 0{,}6 \cdot D_2 = 0{,}4 \cdot 1{,}925032 + 0{,}6 \cdot 1{,}925291 = 1{,}925187,$$

$$C_P = \sum_{j=1}^{m} \omega_j C_j = 0{,}4 \cdot C_1 + 0{,}6 \cdot C_2 = 0{,}4 \cdot 5{,}71351 + 0{,}6 \cdot 5{,}70117 = 5{,}70610.$$

2) Рассчитаем относительное изменение цены портфеля при изменении процентных ставок на рынке сразу после формирования портфеля с 9 до

8% годовых. Так как r = 9%, Δr = – 0,01, D_P = 1,925187, C_P = 5,70610, то согласно (13.10)

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -1{,}925187\frac{(-0{,}01)}{1+0{,}09} + \frac{1}{2}5{,}70610\left(\frac{-0{,}01}{1+0{,}09}\right)^2 = 0{,}017902,$$

где $\Delta\Omega = \Omega(0{,}08) - \Omega(0{,}09)$, $\Omega = \Omega(0{,}09) = 10000$ (д.е.).

В результате снижения процентной ставки цена портфеля увеличилась и приблизительно стала равной

$$\Omega(0{,}08) = \Omega(0{,}09) + \Omega(0{,}09)\cdot 0{,}017902 = 10179{,}02.$$

3) Рассчитаем планируемую и фактическую стоимости инвестиции в портфель П(4000, 6000) в момент времени t = 2 (момент погашения всех облигаций из портфеля). В момент формирования портфеля безрисковые процентные ставки для всех сроков составляли r = 9% годовых. Сразу после формирования портфеля процентные ставки снизились до $\tilde{r}$ = 8% годовых.

Цена покупки портфеля согласно условию задачи $\Omega = \Omega(0{,}09) = 10000$ д.е. Планируемая стоимость инвестиции в портфель на момент t = 2 согласно (13.14) составляет

$$\Omega(0{,}09;2) = \Omega(0{,}09)(1+0{,}09)^2 = 11881{,}00\ .$$

Фактическую стоимость $\Omega(0{,}08;2)$ рассчитаем по формуле (13.13), используя поток платежей от портфеля П(4000, 6000):

$$\Omega(0{,}08;2) = 107{,}345(1+0{,}08)^{1{,}5} + 595{,}940(1+0{,}08) + 107{,}345(1+0{,}08)^{0{,}5} + 10997{,}195 = 11872{,}85.$$

Расчеты показывают, что $\Omega(0{,}08;2) < \Omega(0{,}09;2)$, т.е. на момент погашения всех облигаций из портфеля t = 2 фактическая стоимость инвестиции в портфель меньше планируемой. Следовательно, на момент t = 2 портфель не иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке.

4) Рассчитаем планируемую $\Omega(0{,}09;\ D_P)$ и фактическую $\Omega(0{,}08;\ D_P)$ стоимости инвестиции в портфель в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_P = 1{,}925187$. По формулам (13.14) и (13.13) находим

$$\Omega(0{,}09;\ D_P) = \Omega(0{,}09)(1+0{,}09)^{1{,}925187} = 11804{,}647,$$

$$\Omega(0{,}08;\ D_P) =$$

$$107{,}345(1+0{,}08)^{1{,}925187-0{,}5} + 595{,}940(1+0{,}08)^{1{,}925187-1} + 107{,}345(1+0{,}08)^{1{,}925187-1{,}5} + \frac{10997{,}195}{(1+0{,}08)^{2-1{,}925187}}$$

$$= 11804{,}683.$$

Так как $\Omega(0{,}08;\ D_P) > \Omega(0{,}09;\ D_P)$, то в момент времени, равный дюрации портфеля, $t = D_P$, портфель иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке.

1.14. Управление портфелем облигаций в стратегии иммунизации.

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет следующим условиям.

1. Можно купить и продать любое количество облигаций, в том числе нецелое.

2. Трансакционные расходы при покупке и продаже облигаций отсутствуют.

3. В начальный момент времени $t = 0$ безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.

4. Процентные ставки могут измениться мгновенно на одну и ту же величину для всех сроков.

Пусть Ω – сумма, которую в момент t = 0 инвестор вкладывает в покупку облигаций без кредитного риска для формирования портфеля. Срок инвестиции (инвестиционный горизонт) – T лет. От этой инвестиции он рассчитывает получить сумму, не меньшую $\Omega(1 + r)^T$. Очевидно, что после формирования портфеля процентные ставки на рынке могут измениться. Цель инвестора состоит в том, чтобы при любых изменениях на рынке обеспечить на заданный момент времени T стоимость своей инвестиции, не меньшую $\Omega(1 + r)^T$. Стратегия иммунизации – способ управления портфелем облигаций, обеспечивающий защиту стоимости портфеля от изменений процентных ставок на рынке. В основе этой стратегии – принцип иммунизации Ф. Реддингтона (см. параграф 1.13). Схема управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации выглядит следующим образом.

t = 0. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска. P_j^0 и D_j^0 – цены и дюрации облигаций в момент t = 0 (j = 1, 2,…, m).

Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентной ставки сразу после t = 0 необходимо, чтобы дюрация портфеля совпадала с его инвестиционным горизонтом T лет (принцип Реддингтона). Следовательно, в момент t = 0 портфель должен быть сформирован в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^0 = T \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(14.1)}$$

$$\omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Если срок портфеля T лет удовлетворяет неравенству $\min_j\left\{D_j^0\right\} \le T \le \max_j\left\{D_j^0\right\}$, то система (14.1) разрешима. Пусть $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_m^0$ – решение этой системы. Тогда в момент $t = 0$ сформирован портфель облигаций

$\Pi_0 = \Pi(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \ldots, \Omega_m^0)$,

стоимость которого равна Ω. Сумма инвестиций в облигации j – го вида $\Omega_j^0 = \omega_j^0 \Omega$, где $j = 1, 2, \ldots, m$. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_0 на момент T равна (см. (13.14)):

$$\Omega^0(r, T) = \Omega(1 + r)^T . \qquad (14.2)$$

Дюрация портфеля Π_0 равна его сроку T лет.

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^0, R_2^0, \ldots, R_n^0$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Если сразу после формирования портфеля (или до момента t_1, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменились до значений r_1 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_0 в момент $t = T$ равна (формула 13.13):

$$\Omega^0(r_1,T) = \sum_{i\,;\,t_i \le T} R_i^0(1+r_1)^{T-t_i} + \sum_{i\,;\,t_i > T} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - T}} . \qquad (14.3)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^0(r_1, T) \ge \Omega^0(r, T), \qquad (14.4)$$

Таким образом, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке до момента t_1.

Заметим, что

$$\Omega^0(r_1, T) = \Omega^0(r_1)(1 + r_1)^T, \qquad (14.5)$$

где $\Omega^0(r_1)$ – оценка портфеля Π_0 на момент $t = 0$ согласно новой временной структуре процентных ставок после $t = 0$ (см. формулу (13.15)).

$t = t_1$. Переформирование портфеля облигаций.

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 равна

$$\Omega^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}. \qquad \textbf{(14.6)}$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет (T - t_1) лет. Чтобы портфель был иммунизирован от изменений процентных ставок после t_1, необходимо, чтобы дюрация портфеля в момент t_1 совпадала с его инвестиционным горизонтом (T - t_1) лет. Однако дюрация портфеля Π_0 в момент t_1 скорее всего отличается от этого значения. Действительно, дюрация облигаций зависит от времени, оставшегося до погашения, и нового уровня доходности, и не существует причин, по которым изменения этих двух факторов обязательно снизят дюрацию портфеля ровно на t_1 лет. Поэтому в момент t_1 портфель должен быть сбалансирован заново так, чтобы обеспечить равенство его дюрации (T - t_1) годам.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- **трансакционные расходы на переформирование портфеля отсутствуют;**
- **рыночный уровень доходности r_1;**

- **цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j = 1, 2, \ldots, m$;**

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T - t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^1 = T - t_1 \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \qquad \textbf{(14.7)}$$

$$\omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_m^1$ – решение этой системы. Тогда в момент $t = t_1$ сформирован портфель

$\Pi_1 = \Pi(\Omega_1^1, \Omega_2^1, \ldots, \Omega_m^1)$.

Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть – продать. При этом поступивший платеж R_1^0 реинвестируется в облигации. Так как при покупке и продаже облигаций трансакционные расходы отсутствуют, то стоимость портфеля Π_1 равна $\Omega^1 = \Omega^0(r_1, t_1)$ (см. (14.6)). Инвестиции в облигации каждого вида составляют $\Omega_j^1 = \omega_j^1 \Omega^1 = \omega_j^1 \Omega^0(r_1, t_1)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку $(T - t_1)$ лет. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$\Omega^1(r_1, T) = \Omega^1 (1 + r_1)^{T - t_1}. \qquad \textbf{(14.8)}$$

Заметим, что $\Omega^1 = \Omega^0(r_1, t_1) = \Omega^0(r_1)\,(1 + r_1)^{t_1}$ (см. формулу (13.15)). Тогда $\Omega^1(r_1, T) = \Omega^0(r_1, t_1)(1 + r_1)^{T - t_1} = \Omega^0(r_1)(1 + r_1)^T = \Omega^0(r_1, T)$ (см. (14.5)). Таким образом,

$$\Omega^1(r_1, T) = \Omega^0(r_1, T) \qquad \textbf{(14.9)}$$

– планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна фактической стоимости инвестиции в портфель Π_0 на момент T.

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^1, R_2^1, \ldots, R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2, \ldots, t_n$.

Если сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменились до значения r_2 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_1 в момент $t = T$ равна

$$\Omega^1(r_2,T) = \sum_{i>1;\, t_i \le T} R_i^1 (1+r_2)^{T-t_i} + \sum_{i>1;\, t_i > T} \frac{R_i^1}{(1+r_2)^{t_i - T}}. \qquad (14.10)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^1(r_2, T) \ge \Omega^1(r_1, T), \qquad (14.11)$$

Следовательно, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Итак, имеем

$$\Omega^1(r_2, T) \ge \Omega^1(r_1, T) = \Omega^0(r_1, T) \ge \Omega^0(r, T) = \Omega(1 + r)^T. \qquad (14.12)$$

Таким образом, в отсутствие трансакционных расходов сумма $\Omega(1 + r)^T$ иммунизирована от изменения процентных ставок на рынке, если инвестор придерживается стратегии иммунизации. Процедуру переформирования портфеля можно повторить в момент t_2, когда поступит платеж от портфеля. Если в какой-то момент времени нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, а все вырученные средства инвестируются под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока T.

Замечание. **Теория иммунизации основана на предположении о горизонтальности кривой доходностей и параллельности ее сдвигов. В реальных условиях иммунизация, основанная на этих предположениях, не всегда приводит к желаемым результатам. Однако в целом исследования показывают, что дюрация Маколея портфеля облигаций приводит к столь же хорошим результатам, что и более сложные стратегии [13].**

Пример 14.1. **В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8% годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций со следующими параметрами:**

Вид облигации	Номинал (д.е.)	Купонная ставка	Число платежей за год	Срок до погашения (годы)
A_1	100	10%	1	2
A_2	100	10%	1	4

Инвестор формирует портфель облигаций стоимостью 1000 д.е. с инвестиционным горизонтом 3 года. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Сумма инвестиции (д.е.)	Ω	1000 д.е.
Срок инвестиции (годы)	T	3 года
Рыночная ставка для всех сроков в момент 0	r	8%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 0	r_1	9%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 1	r_2	8%

Решение.

t = 0. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

***r* = 8 % годовых - действующая процентная ставка в момент инвестирования. Значения цен и дюраций облигаций A_1 и A_2 в момент t = 0:**

P_1^0 = **103,566529,** D_1^0 = **1,910596;** P_2^0 = **106,624254,** D_2^0 = **3,504213.**

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна 3 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 1{,}910596\omega_1 + 3{,}504213\omega_2 = 3 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

$$\omega_1 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0.$$

Так как $D_1^0 < 3 < D_2^0$, то система разрешима. ω_1^0 = 0,316396 – доля облигаций 1-го вида в портфеле, ω_2^0 = 0,683604 – доля облигаций 2-го вида.

Таким образом, в начальный момент времени сформирован портфель облигаций

$\Pi_0 = \Pi(\Omega_1^0; \Omega_2^0)$,

стоимость которого равна Ω = 1000 д.е. Сумма инвестиций в облигации каждого вида $\Omega_1^0 = \omega_1^0\Omega$ = 316,3955; $\Omega_2^0 = \omega_2^0\Omega$ = 683,6045. Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 3 года. Поток платежей от этого портфеля приведен в таблице:

t_i	1	2	3	4
R_i^0	94,663391	400,163171	64,113413	705,247542

Проверка иммунизации портфеля Π_0.

Сразу после $t = 0$ процентные ставки изменились с $r = 0{,}08$ на $r_1 = 0{,}09$ и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель на момент $T = 3$ года равна:

$$\Omega^0(r\,;3) = 1000(1+0{,}08)^3 = 1259{,}712.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент $T = 3$ года равна:

$$\Omega^0(r_1;3) = 94{,}663391(1+0{,}09)^2 + 400{,}163171(1+0{,}09) + 64{,}113413 + \frac{705{,}247542}{1+0{,}09} = 1259{,}777.$$

Так как $\Omega^0(r_1;\ 3) > \Omega^0(r;\ 3)$, портфель Π_0 иммунизирован от изменения процентных ставок сразу после $t = 0$.

$t = 1$. Переформирование портфеля облигаций.

В момент $t = 1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0 = 94,663391.

Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент $t = 1$ равна

$$\Omega^0(r_1;1) = 94{,}663391 + \frac{400{,}163171}{1+0{,}09} + \frac{64{,}113413}{(1+0{,}09)^2} + \frac{705{,}247542}{(1+0{,}09)^3} = 1060{,}329018.$$

Таким образом, в момент времени $t = 1$ инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью:

$$\frac{400{,}163171}{1+0{,}09} + \frac{64{,}113413}{(1+0{,}09)^2} + \frac{705{,}247542}{(1+0{,}09)^3} = 965{,}665627.$$

Дюрация этого портфеля в момент t = 1 равна 2, 183767 года. Инвестиционный горизонт 2 года. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать.

Переформирование портфеля производится в момент действия ставки $r_1 = 0{,}09$.

Цены и дюрации облигаций в момент t = 1:

облигация A_1: $P_1^1 = 100{,}917431$, $D_1^1 = 1$;

облигация A_2: $P_2^1 = 102{,}531295$; $D_2^1 = 2{,}738954$.

Чтобы в момент t = 1 сформировать новый портфель облигаций, дюрация которого равна 2 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \omega_1 + 2{,}738954\,\omega_2 = 2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

$$\omega_1 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0.$$

Так как $D_1^1 < 2 < D_2^1$, то система разрешима. $\omega_1^1 = 0{,}424942$ – доля облигаций 1-го вида в новом портфеле, $\omega_2^1 = 0{,}575058$ – доля облигаций 2-го вида.

Таким образом, в момент t = 1 сформирован портфель облигаций

$\Pi_1 = \Pi(\Omega_1^1; \Omega_2^1)$,

стоимость которого $\Omega^1 = \Omega^0(r_1;\ 1) = 1060{,}329018$ д.е. Инвестиции в облигации каждого вида $\Omega_1^1 = \omega_1^1\Omega^1 = 450{,}577838$ д.е.; $\Omega_2^1 = \omega_2^1\Omega^1 = 609{,}751179$ д.е. Дюрация этого портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 2 года. Поток платежей от портфеля Π_1 приведен в таблице:

t_i	2	3	4

R_i^1	550,599607	59,469763	654,167393

где i = 1, 2, 3 – номер платежа от портфеля $П_1$.

Проверка иммунизации портфеля $П_1$.

Сразу после $t = 1$ процентные ставки снизились с $r_1 = 0{,}09$ до $r_2 = 0{,}08$ и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель $П_1$ на момент $T = 3$ года равна:

$$\Omega^1(r_1; 3) = 1060{,}329018\,(1 + 0{,}09)^2 = 1259{,}\,776929.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент $T = 3$ года равна:

$$\Omega^1(r_2; 3) = 550{,}599607\,(1 + 0{,}08) + 59{,}469763 + \frac{654{,}167393}{1 + 0{,}08} = 1259{,}827931.$$

Так как $\Omega^1(r_2; 3) > \Omega^1(r_1; 3)$, портфель $П_1$ иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после $t = 1$.

Замечание. **Рассмотрим механизм переформирования портфеля облигаций в момент $t = 1$. Обозначим через x_j и y_j, где $j = 1, 2$, денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно при переформировании портфеля. Тогда в момент $t = 1$ облигации $А_1$ куплены в количестве**

$$\frac{\Omega_1^1}{P_1^1} - \frac{\Omega_1^0}{P_1^0} = \frac{450{,}577838}{100{,}917431} - \frac{316{,}395520}{103{,}566529} = 4{,}464817 - 3{,}054998 = 1{,}409819$$

на сумму $1{,}409817 \cdot P_1^1 = 1{,}409819 \cdot 100{,}917431 = 142{,}2753 = x_1$.

Облигации $А_2$ проданы в количестве

$$\frac{\Omega_2^0}{P_2^0} - \frac{\Omega_2^1}{P_2^1} = \frac{683{,}604480}{106{,}624254} - \frac{609{,}751179}{102{,}531295} = \mathbf{6{,}411341 - 5{,}946976 = 0{,}464365}$$

на сумму 0,464365 $\cdot P_2^1$ **= 0,464365·102,531295 = 47,611945 =** y_2**.**

Поступивший в момент $t = 1$ **платеж** R_1^0 **= 94,663391. Имеем равенство**

$x_1 = R_1^0 + y_2$

– затраты равны поступлениям. Следовательно, переформирование портфеля облигаций в момент $t = 1$ **происходит следующим образом. На поступивший платеж** R_1^0 **и выручку от продажи части облигаций одного вида покупаются облигации другого вида. Купля, продажа производятся по ценам облигаций на момент** $t = 1$**, т.е.** P_1^1 **,** P_2^1

$t = 2.$

От портфеля $П_1$ **поступает платеж** R_1^1 **= 550,599607 д.е. Облигация** A_1 **погашена. На рынке действует ставка** $r_2 = 0{,}08$**. Дюрация портфеля** $П_1$ **в момент** $t = 2$ **равна** D_2^1 **= 1,910596 – дюрации облигаций** A_2**, оставшихся в портфеле. Инвестиционный горизонт портфеля** $П_1$ **в момент** $t = 2$ **равен 1 году. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать. Однако из облигаций** A_2 **нельзя сформировать портфель с дюрацией, равной 1 году. Портфель продается.**

Стоимость инвестиции в портфель $П_1$ **в момент** $t = 2$**:**

$$\Omega^1(r_2; 2) = 550{,}599607 + \frac{59{,}469763}{1 + 0{,}08} + \frac{654{,}167393}{(1 + 0{,}08)^2} = 1166{,}507344.$$

В момент $t = 2$ инвестор располагает суммой 550,599607 д.е. и облигациями вида A_2 стоимостью $\frac{59{,}469763}{1+0{,}08}$ + $\frac{654{,}167393}{(1+0{,}08)^2}$ = 615,907737 д.е. После продажи облигаций вся вырученная сумма $\Omega^1(r_2; 2)$ = 1166,507344 д.е. инвестируется на 1 год (например, вкладывается на банковский счет) под действующую ставку 8% годовых. Через год можно получить сумму

1166,507344(1 + 0,08) = 1259,827931.

Таким образом, в результате осуществления стратегии иммунизации инвестор через 3 года получит сумму 1259,827931 д.е., которая больше планируемой с самого начала суммы, равной 1259,712000 д.е.

Иммунизация портфеля облигаций при наличии трансакционных расходов.

Предположим, рынок облигаций удовлетворяет перечисленным в начале параграфа условиям, кроме наличия трансакционных расходов. При покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные в размере C_b и C_a соответственно.

Рассмотрим схему управления портфелем облигаций в стратегии иммунизации при наличии трансакционных расходов.

$t = 0$. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

Предположим, в начальный момент времени $t = 0$ инвестор формирует портфель облигаций стоимостью Ω на срок T лет. Тогда на формирование этого портфеля инвестору потребуется сумма $\Omega(1 + C_b)$. Портфель формируется из m видов облигаций без кредитного риска, цены и дюрации которых в момент $t = 0$ равны соответственно P_j^0 и D_j^0 ($j = 1, 2,\ldots, m$). Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны r.

Портфель, защищенный от изменения процентных ставок сразу после покупки облигаций, формируется в соответствии с решением системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^0 = T \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \qquad (14.13)$$

$$\omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_m^0$ **– решение этой системы. Тогда в момент** $t = 0$ **формируется портфель облигаций**

$\Pi_0 = \Pi(\Omega_1^0, \Omega_2^0, \ldots, \Omega_m^0)$**,**

стоимость которого равна Ω**, а** $\Omega_j^0 = \omega_j^0 \Omega$**, где** $j = 1, 2, \ldots, m$**. Планируемая стоимость инвестиции в портфель** Π_0 **на момент** T **равна**

$$\Omega^0(r, T) = \Omega(1 + r)^T. \qquad (14.14)$$

Дюрация этого портфеля равна его сроку T**. Ожидаемый поток платежей от этого портфеля** $R_1^0, R_2^0, \ldots, R_n^0$ **в моменты времени** $t_1, t_2, \ldots, t_n$**.**

Если сразу после формирования портфеля (или до момента t_1**, первого платежа от портфеля) процентные ставки изменились до значений** r_1 **и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в** Π_0 **в момент** $t = T$ **равна (формула 13.13):**

$$\Omega^0(r_1, T) = \sum_{i\,;\,t_i \leq T} R_i^0 (1 + r_1)^{T - t_i} + \sum_{i\,;\,t_i > T} \frac{R_i^0}{(1 + r_1)^{t_i - T}}. \qquad (14.15)$$

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^0(r_1, T) \geq \Omega^0(r, T), \qquad (14.16)$$

Таким образом, портфель Π_0 иммунизирован против изменения процентных ставок на рынке до момента t_1.

$t = t_1$. Переформирование портфеля облигаций.

В момент $t = t_1$ от портфеля Π_0 поступает первый платеж R_1^0. Стоимость инвестиции в портфель Π_0 в момент t_1 равна

$$\Omega^0(r_1, t_1) = R_1^0 + \sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}. \qquad (14.17)$$

Таким образом, в момент времени t_1 инвестор располагает денежной суммой R_1^0 и портфелем облигаций стоимостью $\sum_{i=2}^{n} \frac{R_i^0}{(1+r_1)^{t_i - t_1}}$. Инвестиционный горизонт портфеля составляет $(T - t_1)$ лет. Чтобы обеспечить равенство дюрации портфеля $(T - t_1)$ годам, портфель необходимо переформировать.

Опишем условия, в которых происходит переформирование портфеля Π_0 в момент t_1:

- **переформирование портфеля потребует от инвестора трансакционных расходов;**
- **рыночный уровень доходности r_1;**
- **цены и дюрации облигаций, из которых сформирован портфель, изменились до значений P_j^1 и D_j^1 соответственно, $j = 1, 2,\dots, m$;**

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна $(T - t_1)$ годам, необходимо решить систему

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \omega_j D_j^1 = T - t_1 \\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1 \end{cases} \qquad (14.18)$$

$$\omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Пусть $\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_m^1$ **– решение этой системы. Для переформирования портфеля часть облигаций придется купить, часть – продать. Так как при покупке и продаже облигаций удерживаются комиссионные, то часть стоимости** $\Omega^0(r_1,t_1)$ **(см.(14.17)) пойдет на трансакционные расходы при переформировании портфеля. Обозначим величину трансакционных расходов на переформирование портфеля через** C. **Пусть** x_j **и** y_j, **где** $j = 1, 2, \ldots, m$, **– денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно. Тогда** $C = C_b \sum_{j=1}^{m} x_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j$.

Чтобы минимизировать трансакционные расходы необходимо решить задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} \dfrac{\Omega_j^0}{P_j^0} P_j^1 + x_j - y_j = \omega_j^1\left(\Omega^0(r_1, t_1) - C\right), \quad j = 1,2,\ldots,m \\ C = C_b \sum_{j=1}^{m} x_j + C_a \sum_{j=1}^{m} y_j \end{cases} \qquad (14.19)$$

$$C \geq 0, \; x_j \geq 0, \; y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

$$\min C$$

Здесь P_j^0, P_j^1 **– цена облигации** j **– го вида в моменты** $t = 0$ **и** $t = t_1$ **соответственно.**

Множество допустимых решений задачи ограничено и замкнуто. Задача разрешима. Пусть $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_m^1, C^1$ **– решение задачи (14.19). Тогда в момент** t_1 **сформирован портфель облигаций**

$$\Pi_1 = \Pi(\Omega_1^1, \Omega_2^1, \ldots, \Omega_m^1).$$

Стоимость портфеля равна $\Omega^1 = \Omega^0(r_1, t_1) - C^1$. Инвестиции в облигации каждого вида составляют $\Omega_j^1 = \omega_j^1\Omega^1$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Дюрация этого портфеля равна его сроку $(T - t_1)$ лет. Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент T равна

$$\Omega^1(r_1, T) = \Omega^1 (1 + r_1)^{T - t_1}. \qquad (14.20)$$

Ожидаемый поток платежей от этого портфеля $R_1^1, R_2^1, \ldots, R_{n-1}^1$ в моменты времени $t_2, \ldots, t_n$.

Если сразу после t_1 (или до момента t_2) процентные ставки на рынке изменились до значения r_2 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут, то фактическая стоимость инвестиции в Π_1 в момент $t = T$ равна

$$\Omega^1(r_2, T) = \sum_{i>1;\, t_i \le T} R_i^1 (1 + r_2)^{T - t_i} + \sum_{i>1;\, t_i > T} \frac{R_i^1}{(1 + r_2)^{t_i - T}}.$$

(14.22)

Согласно иммунизирующему свойству дюрации портфеля

$$\Omega^1(r_2, T) \ge \Omega^1(r_1, T),$$

(14.23)

Следовательно, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t_1 (или до момента t_2).

Если нельзя сформировать портфель с требуемой дюрацией, то имеющийся портфель продается, что снова потребует трансакционных расходов. Все вырученные средства размещаются на счет в банк под действующую на данный момент процентную ставку до окончания срока *T*. Вследствие наличия трансакционных расходов полученная в результате сумма будет несколько меньше той, которая была бы в их отсутствие. При наличии трансакционных расходов инвестор сталкивается с проблемой выбора частоты пересмотра портфеля.

Пример 14.2. **В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 10 % годовых. На рынке имеются два вида купонных облигаций со следующими параметрами:**

Вид облигации	Номинал (д.е.)	Купонная ставка	Число платежей за год	Срок до погашения (годы)
A_1	100	8 %	1	2
A_2	100	8 %	1	4

Инвестор, располагая суммой 10050 д.е., желает сформировать портфель из указанных облигаций на 3 года. При покупке и продаже облигаций берутся комиссионные в размере 0,5 %. Рассчитать стратегию иммунизации этого портфеля для следующего изменения процентных ставок: 9% годовых сразу после формирования портфеля, 8 % годовых – непосредственно после момента t = 1.

Затраты на формирование портфеля	$\Omega(1 + C_b)$	10 050 д.е.
Комиссионные	$C_b = C_a$	0,5%
Сумма инвестиций в портфель	Ω	10 000 д.е.

Срок инвестиций	T	3 года
Рыночная ставка для всех сроков в момент 0	r	10%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 0	r_1	9%
Рыночная ставка для всех сроков сразу после 1	r_2	8%

Решение.

t = 0. Формирование иммунизированного портфеля облигаций.

***r* = 10% годовых - действующая процентная ставка в момент инвестирования. Значения цен и дюраций облигаций A_1 и A_2 в момент t = 0:**

P_1^0 = **96,528926,** D_1^0 = **1,924658;** P_2^0 = **93,660269,** D_2^0 = **3,561694.**

Чтобы сформировать портфель, дюрация которого равна 3 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 1{,}924658\,\omega_1 + 3{,}561694\,\omega_2 = 3 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\omega_1 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0.}$$

Решение системы: ω_1^0 = **0,343116,** ω_2^0 = **0,656884. Следовательно, в начальный момент формируется портфель облигаций**

$\Pi_0 = \Pi(\Omega_1^0\,;\Omega_2^0)$,

стоимость которого равна Ω = 10000 д.е. Сумма инвестиций в облигации каждого вида $\Omega_1^0 = \omega_1^0\,\mathbf{\Omega}$ **= 3431,1644;** $\Omega_2^0 = \omega_2^0\,\mathbf{\Omega}$ **= 6568,8356. Дюрация портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 3 года. Поток платежей от этого портфеля приведен в таблице:**

t_i	1	2	3	4
R_i^0	845,441287	4399,986575	561,077664	7574,548461

Проверка иммунизации портфеля $П_0$.

Сразу после t = 0 процентные ставки изменились с r = 0,1 на r_1 = 0,09 и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля $П_0$.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$\Omega^0(r\,;3) = 10000(1 + 0,1)^3 = 13\,310,00.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент T = 3 года равна:

$$\Omega^0(r_1; 3) = 845,441287(1 + 0,09)^2 + 4399,986575(1 + 0,09) +$$

$$+ 561,077664 + \frac{7574,548461}{1+0,09} = 13\,310,658852.$$

Так как $\Omega^0(r_1;3) > \Omega^0(r; 3)$, портфель $П_0$ иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после t = 0.

t = 1. Переформирование портфеля облигаций.

От портфеля $П_0$ поступает первый платеж R_1^0 = 845,441287. Стоимость инвестиции в портфель $П_0$ в момент t = 1 равна

$$\Omega^0(r_1; 1) = 845,441287 + \frac{4399,986575}{1+0,09} + \frac{561,077664}{(1+0,09)^2} + \frac{7574,548461}{(1+0,09)^3} = 11203,315253.$$

Часть этой суммы будет затрачена на выплату комиссионных при переформировании портфеля. Переформирование портфеля производится в момент действия ставки r_1 = 0,09. Цены и дюрации облигаций в момент t = 1:

P_1^1 **= 99,082569,** D_1^1 **= 1;** P_2^1 **= 97,468705;** D_2^1 **= 2,780316.**

Чтобы в момент *t* = 1 сформировать новый иммунизированный портфель облигаций, дюрация которого равна 2 годам, необходимо решить систему:

$$\begin{cases} \omega_1 + 2{,}780316\omega_2 = 2 \\ \omega_1 + \omega_2 = 1 \end{cases}$$

$$\omega_1 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0.$$

Решение системы: ω_1^1 **= 0,438302;** ω_2^1 **= 0,561698.**

При переформировании портфеля в соответствии с найденным решением ω_1^1 **,** ω_2^1 **необходимо минимизировать трансакционные расходы.**

Задача минимизации трансакционных расходов (14.19) имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\Omega_1^0}{P_1^0} P_1^1 + x_1 - y_1 = \omega_1^1\left(\Omega^0(r_1, 1) - C\right), \\ \dfrac{\Omega_2^0}{P_2^0} P_2^1 + x_2 - y_2 = \omega_2^1\left(\Omega^0(r_1, 1) - C\right) \end{cases}$$

$$C = C_b\,(x_1 + x_2) + C_a\,(y_1 + y_2).$$

$$C \geq 0,\; x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; y_1 \geq 0,\; y_2 \geq 0$$

$$\min C$$

Здесь x_j и y_j, j = 1, 2, – денежные суммы, затраченные на покупку, и вырученные от продажи облигаций соответственно при переформировании портфеля. C – величина трансакционных расходов на переформирование портфеля. $C_b = C_a = 0{,}005$ – комиссионные при покупке и продаже облигаций соответственно. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{3431{,}164377}{96{,}528926} 99{,}082569 + x_1 - y_1 = 0{,}438302(11203{,}31525 - C), \\ \dfrac{6568{,}835623}{93{,}660269} 97{,}468705 + x_2 - y_2 = 0{,}561698(11203{,}31525 - C) \end{cases}$$

$$C = 0{,}005\,(x_1 + x_2) + 0{,}005\,(y_1 + y_2).$$

$C \ge 0,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0$

min C

Решение этой задачи симплекс – методом приводится в таблице:

x_1	x_2	y_1	y_2	C	B
1	0	-1	0	0,438302	1388,499433
0	1	0	-1	0,561698	-543,058146
1	1	1	1	-200	0,000
0	0	0	0	-1	0,000
1	0	-1	0	0,438302	1388,499433
0	1	0	-1	0,561698	-543,058146
0	1	2	1	-200,438302	-1388,499433
0	0	0	0	-1	0
1	0,002187	-0,995627	0,002187	0	1385,463177

0	1,002802	0,005605	-0,997198	0	-546,949206
0	-0,004989	-0,009978	-0,004989	1	6,927316
0	-0,004989	-0,009978	-0,004989	0	6,927316
1	0,004386	-0,995614	0	0	1384,263793
0	-1,005620	-0,005620	1	0	548,486256
0	-0,010006	-0,010006	0	1	9,663750
0	-0,010006	-0,010006	0	0	9,663750

Оптимальное решение задачи имеет вид:

$$x_1^1 = 1384{,}263793,\ x_2^1 = 0,\ y_1^1 = 0,\ y_2^1 = 548{,}486256,\ C^1 = 9{,}663750.$$

После выплаты трансакционных расходов стоимость портфеля в момент $t = 1$ станет равной

$$\Omega^1 = \Omega^0(r_1;\, 1) - C^1 = 11193{,}651503.$$

Таким образом, в момент $t = 1$ сформирован портфель

$\mathbf{\Pi_1 = \Pi(}\Omega_1^1\,\mathbf{;}\,\Omega_2^1\mathbf{),}$

стоимость которого $\mathbf{\Omega^1}$ = 11193,651503 д.е. Инвестиции в облигации каждого вида $\Omega_1^1 = \omega_1^1\mathbf{\Omega^1} =$ 4906,198574 д.е.; $\Omega_2^1 = \omega_2^1\mathbf{\Omega^1} =$ 6287,452929 д.е. Дюрация этого портфеля совпадает с его инвестиционным горизонтом 2 года. Поток платежей от портфеля $\mathbf{\Pi_1}$ приведен в таблице:

t_i	2	3	4
R_i^1	5863,815659	516,059214	6966,799385

где *i* = 1, 2, 3 – номер платежа от портфеля $\mathbf{\Pi_1}$.

Проверка иммунизации портфеля Π_1.

Сразу после $t = 1$ процентные ставки снизились с $r_1 = 0{,}09$ до $r_2 = 0{,}08$ и предполагается, что в дальнейшем они изменяться не будут. Необходимо проверить иммунизацию портфеля.

Планируемая стоимость инвестиции в портфель Π_1 на момент $T = 3$ года равна:

$$\Omega^1(r_1; 3) = 11193{,}651503\,(1 + 0{,}09)^2 = 13299{,}177350.$$

Фактическая стоимость инвестиции в портфель на момент $T = 3$ года равна:

$$\Omega^1(r_2; 3) = 5863{,}815659(1 + 0{,}08) + 516{,}059214 + \frac{6966{,}799385}{1+0{,}08} = 13299{,}720296.$$

Так как $\Omega^1(r_2; 3) > \Omega^1(r_1; 3)$, портфель Π_1 иммунизирован против изменения процентных ставок сразу после $t = 1$.

Замечание. **Рассмотрим процедуру переформирования портфеля облигаций в момент $t = 1$. В момент $t = 1$ облигации A_1 куплены в количестве**

$$\frac{\Omega_1^1}{P_1^1} - \frac{\Omega_1^0}{P_1^0} = \frac{4906{,}198574}{99{,}082569} - \frac{3431{,}164377}{96{,}528926} = 49{,}516263 - 35{,}545453 = 13{,}970810$$

на сумму $13{,}970811 \cdot P_1^1 = 13{,}970810 \cdot 99{,}082569 = 1384{,}263793 = x_1$.

Облигации A_2 проданы в количестве

$$\frac{\Omega_2^0}{P_2^0} - \frac{\Omega_2^1}{P_2^1} = \frac{6568{,}835623}{93{,}660269} - \frac{6287{,}452929}{97{,}468705} = 70{,}134708 - 64{,}507402 = 5{,}627306$$

на сумму $5{,}627306 \cdot P_2^1 = 5{,}627306 \cdot 97{,}468705 = 548{,}486256 = y_2$.

Трансакционные расходы $0{,}005(x_1 + y_2) = 9{,}66375 = C^1$

Поступивший в момент $t = 1$ платеж R_1^0 = 845,441287. Имеем равенство

$$C^1 + x_1 = R_1^0 + y_2 = 1393{,}927543.$$

– затраты равны поступлениям. На поступивший платеж R_1^0 и выручку от продажи части облигаций одного вида покупаются облигации другого вида и выплачиваются комиссионные на переформирование портфеля. Купля, продажа производятся по ценам облигаций на момент $t = 1$, т.е. P_1^1, P_2^1.

$t = 2$.

От портфеля $П_1$ поступает платеж R_1^1 = 5863,815659 д.е. Облигация A_1 погашена. Рыночная ставка $r_2 = 0{,}08$. Дюрация портфеля $П_1$ в момент $t = 2$ равна D_2^1 = 1,925926 – дюрации облигаций A_2, оставшихся в портфеле. Инвестиционный горизонт портфеля $П_1$ в момент $t = 2$ равен 1 году. Так как дюрация портфеля не совпадает с его инвестиционным горизонтом, портфель необходимо переформировать. Однако из облигаций A_2 нельзя сформировать портфель с дюрацией, равной 1 году. Портфель продается.

Стоимость инвестиции в портфель $П_1$ в момент $t = 2$:

$$\Omega^1(r_2; 2) = 5863{,}815659 + \frac{516{,}059214}{1+0{,}08} + \frac{6966{,}799385}{(1+0{,}08)^2} = 12314{,}555830.$$

Портфель продается за

$$P(r_2; 2) = \frac{516{,}059214}{1+0{,}08} + \frac{6966{,}799385}{(1+0{,}08)^2} = 6450{,}740171.$$

Сумма комиссионных $0{,}005P(r_2; 2) = 32{,}253701$. На счет в банк вкладывается сумма

$$5863{,}8157 + 0{,}995\,P(r_2; 2) = 12282{,}302129$$

под 8 % годовых. Через 1 год можно получить сумму

$$12282{,}30213\,(1 + 0{,}08) = 13264{,}886299.$$

1.15. Простейшие активные и пассивные стратегии управления портфелем облигаций.

Стратегии управления портфелем облигаций разделяют на активные и пассивные. Активная стратегия предполагает изменение структуры портфеля в соответствии с изменениями условий на рынке. Стратегия иммунизации – активная стратегия управления портфелем облигаций.

Другой пример активной стратегии – стратегия управления дюрацией портфеля в соответствии с прогнозом изменения рыночных процентных ставок. Если ожидается снижение процентных ставок, то дюрация портфеля увеличивается. И наоборот – если ожидается рост процентных ставок, то дюрация портфеля уменьшается. Изменение дюрации портфеля осуществляется с помощью обмена (свопа) облигаций из портфеля на новые. Выполняется так называемый **упреждающий своп**.

Пример 15.1. Имеется портфель $\Pi_0 = \Pi(1000, 1500, 2500, 4000)$ из облигаций четырех видов. Дюрации облигаций соответственно равны $D_1 = 1{,}5$ года, $D_2 = 2$ года, $D_3 = 3{,}5$ года, $D_4 = 5$ лет. В данный момент безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8% годовых. Выполнить упреждающий своп для следующего прогноза процентных ставок: а) ставки увеличатся на 1%; б) ставки снизятся на 1%. Рынок облигаций удовлетворяет тем же условиям, что и в параграфе 1.14. Трансакционные расходы при покупке и продаже облигаций отсутствуют.

Дюрация портфеля Π_0 согласно формуле (13.6) равна

$$D_{\Pi_0} = \frac{1}{9}\cdot 1{,}5 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{5}{18}\cdot 3{,}5 + \frac{4}{9}\cdot 5 = 3{,}694 \text{ (года)},$$

стоимость портфеля Ω = 9000 д.е. Относительное изменение стоимости портфеля Π_0 при изменении процентных ставок на рынке на величину Δr согласно формуле (13.9) приблизительно равно

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_{\Pi_0}\frac{\Delta r}{1+r}.$$

а) r = 8 %, $\Delta r = 0{,}01$. Тогда

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -3{,}694\frac{0{,}01}{1+0{,}08} = -0{,}0342,$$

где $\Delta\Omega = \Omega_{\Pi_0}(0{,}09) - \Omega(0{,}08)$, $\Omega(0{,}08) = \Omega$. При увеличении процентных ставок на 1 % стоимость портфеля Π_0 снизится и станет равной

$$\Omega_{\Pi_0}(0{,}09) = \Omega(0{,}08) + \Omega(0{,}08)\cdot(-0{,}0342) = 8692{,}13.$$

Чтобы падение цены портфеля было менее резким, дюрацию портфеля следует уменьшить. Для этого долгосрочные облигации надо заменить на краткосрочные. Облигации с дюрацией D_4 = 5 лет – продать и на вырученную сумму 4000 д.е. приобрести облигации с дюрацией D_1 = 1,5 года. Новый портфель имеет вид $\Pi_1 = \Pi(5000,\ 1500,\ 2500, 0)$. Стоимость портфеля не изменилась. Его дюрация равна

$$D_{\Pi_1} = \frac{5}{9}\cdot 1{,}5 + \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{5}{18}\cdot 3{,}5 = 2{,}139 \text{ (года)}.$$

Тогда относительное изменение стоимости портфеля Π_1 при увеличении процентных ставок на 1 % приблизительно равно

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_{\Pi_1}\frac{\Delta r}{1+r} = -2{,}139\frac{0{,}01}{1+0{,}08} = -0{,}0198,$$

а новая стоимость Π_1 в результате увеличения процентных ставок на 1 % составит

$$\Omega_{\Pi_1}(0{,}09) = \Omega(0{,}08) + \Omega(0{,}08)\cdot(-0{,}0198) = 8821{,}76.$$

б) r = 8 %, $\Delta r = -0{,}01$. Тогда

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -3{,}694\frac{(-0{,}01)}{1+0{,}08} = 0{,}0342.$$

При снижении процентных ставок на 1 % стоимость портфеля Π_0 станет равной

$$\Omega_{\Pi_0}(0{,}09) = \Omega(0{,}08) + \Omega(0{,}08)\cdot 0{,}0342 = 9307{,}87.$$

Чтобы еще больше увеличить цену портфеля, его дюрацию следует увеличить. Для этого краткосрочные облигации надо заменить на долгосрочные. Облигации с дюрацией D_1 = 1,5 года – продать и на вырученную сумму 1000 д.е. приобрести облигации с дюрацией D_4 = 5 лет. Новый портфель имеет вид $\Pi_1 = \Pi(0,1500,\ 2500,\ 5000)$. Стоимость портфеля не изменилась. Его дюрация равна

$$D_{\Pi_1} = \frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{5}{18}\cdot 3{,}5 + \frac{5}{9}\cdot 5 = 4{,}083 \text{ (года)}.$$

Тогда относительное изменение стоимости портфеля Π_1 при снижении процентных ставок на 1 % составит

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \approx -D_{\Pi_1}\frac{\Delta r}{1+r} = -4{,}083\frac{(-0{,}01)}{1+0{,}08} = 0{,}0378,$$

а новая стоимость Π_1 равна

$$\Omega_{\Pi_1}(0{,}09) = \Omega(0{,}08) + \Omega(0{,}08)\cdot 0{,}0378) = 9340{,}28.$$

Заметим, что исследования не подтверждают возможность прогнозирования процентных ставок, позволяющую постоянно получать доходность выше рыночной.

Пассивная стратегия управления портфелем облигаций предполагает, что структура портфеля, сформированного в начальный момент времени, остается неизменной в течение всего срока существования портфеля независимо от ситуации на рынке. Один из примеров пассивной стратегии управления портфелем – **портфель с согласованными денежными потоками**, или **предназначенный** портфель. Согласно этой стратегии, облигации приобретаются таким образом, что финансовый поток, получаемый в каждый период, в точности равен оттоку средств за этот период. Рассмотрим формирование такого портфеля. Предположим, инвестор через $t_1, t_2, \dots, t_n$ лет от текущего момента времени $t = 0$ должен выплатить денежные суммы $S_1, S_2, \dots, S_n$ соответственно. На рынке имеются m видов облигаций без кредитного риска, из которых можно сформировать портфель с потоком платежей в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n$. Цены облигаций в момент $t = 0$ равны соответственно $P_1, P_2, \dots, P_m$. Требуется сформировать портфель наименьшей стоимости, поток платежей от которого достаточен для выполнения обязательств инвестора. Предположим, на рынке можно купить любое количество облигаций, в том числе нецелое. Пусть x_j – количество облигаций j – го вида в портфеле, $j = 1, 2, \dots, m$. Тогда портфель формируется в соответствии с решением задачи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} C_i^j x_j \geq S_i, \; i = 1, 2, \dots, n \\ x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \qquad (15.1)$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \; (min)$$

Здесь c_i^j платеж по облигации j – го вида в момент t_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Решением задачи (15.1) является портфель, позволяющий выполнить обязательства инвестора и имеющий наименьшую стоимость. Для такого портфеля нет необходимости реинвестировать поступающие платежи. Следовательно, отсутствует реинвестиционный риск. Кроме того, портфель не продается до погашения. Значит, отсутствует процентный риск.

Пример 15.2. Через 1, 2 и 3 года инвестору предстоят выплаты в размерах 260 д.е., 660 д.е., 440 д.е. соответственно. На рынке имеются облигации двух видов A_1 и A_2 с параметрами

Вид облигации	c_1^j	c_2^j	c_3^j	P_j
A_1	10	10	110	100
A_2	50	150	0	150

Сформировать из этих облигаций портфель наименьшей стоимости, платежи от которого позволяют выполнить обязательства инвестора.

Задача (15.1) имеет вид:

$$\begin{cases} 10\,x_1 + 50\,x_2 \geq 260 \\ 10\,x_1 + 150\,x_2 \geq 660 \\ 110\,x_1 \geq 440 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 100\,x_1 + 150\,x_2 \ (min)$$

Это задача линейного программирования, которую можно решить графическим методом.

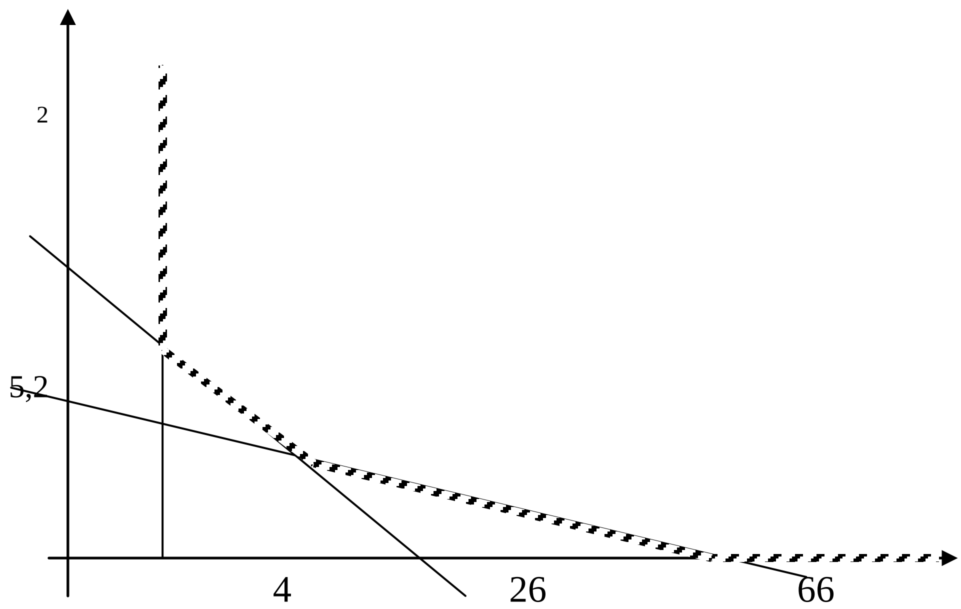


Рис. 1.15.1

При решении задачи используем две теоремы из линейного программирования. Теорема о разрешимости задачи линейного программирования: задача (минимизации) линейного программирования разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений задачи не пусто, а целевая функция ограничена снизу на множестве допустимых решений задачи. Теорема об оптимальном решении задачи линейного программирования: если задача линейного программирования разрешима, то по крайней мере одна из угловых точек множества ее допустимых решений является оптимальным решением этой задачи.

Несложно убедиться, что задача разрешима. A(4;4,4), B(6,4), C(66,0) – угловые точки множества ее допустимых решений. Значения целевой функции в этих точках f(A) = 1060, f(B) = 1200, f(C) = 6600. Следовательно, точка A(4;4,4) – оптимальное решение задачи. Предназначенный портфель П(400, 660) содержит 4 облигации вида A_1 и 4,4 облигации вида A_2. Стоимость портфеля 1060 д.е. Сделаем проверку. Платежи от портфеля в конце 1 – го, 2 – го и 3 – го годов равны соответственно:

$$10 \cdot 4 + 50 \cdot 4{,}4 = 260;$$

$$10 \cdot 4 + 150 \cdot 4{,}4 = 700;$$

$$110 \cdot 4 = 440.$$

Как видим, портфель позволяет выполнить обязательства инвестора. В конце 2 – го года от портфеля поступают избыточные средства.

Недостатком этой стратегии является то, что согласование потока платежей и потока обязательств является трудным и дорогостоящим. Это объясняется тем, что на рынке существует лишь конечный набор чисто дисконтных облигаций и для формирования нужного потока платежей от портфеля инвестор вынужден приобретать купонные облигации. Вследствие этого в моменты t_1, $t_2,\ldots, t_n$ от портфеля могут поступать избыточные средства. Уменьшить стоимость портфеля позволяет использование следующей разновидности стратегии предназначенного портфеля. Избыточная часть G_i поступающего платежа от портфеля в момент t_i, $i = 1, 2,\ldots, n - 1$, используется для выполнения обязательства инвестора в следующий момент t_{i+1}. Эта часть платежа реинвестируется на срок $(t_{i+1} - t_i)$ лет под действующую в момент t_i годовую безрисковую процентную ставку r_i. Тогда портфель формируется в соответствии с решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m} C_1^j x_j \geq S_1 + G_1 \\ \sum_{j=1}^{m} C_2^j x_j + G_1 (1 + r_1)^{t_2 - t_1} \geq S_2 + G_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^{m} C_{n-1}^j x_j + G_{n-2} (1 + r_{n-2})^{t_{n-1} - t_{n-2}} \geq S_{n-1} + G_{n-1} \\ \sum_{j=1}^{m} C_n^j x_j + G_{n-1} (1 + r_{n-1})^{t_n - t_{n-1}} \geq S_n \\ G_i \geq 0, \ i = 1, 2, \dots, n-1 \\ x_j \geq 0, \ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \qquad (15.2)$$

$$f = \sum_{j=1}^{m} P_j x_j \ (min)$$

Чтобы решить эту задачу, необходимо знать годовые безрисковые процентные ставки r_i для инвестиций в момент t_i на срок $(t_{i+1} - t_i)$ лет, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Пример 15.3. В условиях примера 15.2 избыточная часть платежей от портфеля реинвестируется для выполнения обязательства инвестора через год. Безрисковые процентные ставки на весь период 5 % годовых.

Задача (15.2) имеет вид:

$$\begin{cases} 10 x_1 + 50 x_2 \geq 260 + G_1 \\ 10 x_1 + 150 x_2 + G_1 (1 + 0{,}05) \geq 660 + G_2 \\ 110 x_1 + G_2 (1 + 0{,}05) \geq 440 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$f = 100 x_1 + 150 x_2 \ (min)$$

Решим эту задачу симплекс – методом.

x_1	x_2	G_1	G_2	t_1	t_2	t_3	B

10	50	-1	0	-1	0	0	260
10	150	1,05	-1	0	-1	0	660
110	0	0	1,05	0	0	-1	440
-100	-150	0	0	0	0	0	0
0	50	-1	-0,0954545	-1	0	0,0909091	220
0	150	1,05	-1,0954545	0	-1	0,0909091	620
1	0	0	0,0095455	0	0	-0,0090909	4
0	-150	0	0,9545455	0	0	-0,9090909	400
0	0	-1,35	0,269697	-1	0,3333333	0,0606061	13,333333
0	1	0,007	-0,007303	0	-0,0066667	0,0006061	4,1333333
1	0	0	0,0095455	0	0	-0,0090909	4
0	0	1,05	-0,1409091	0	-1	-0,8181818	1020
0	0	-5,005618	1	-3,7078652	1,2359551	0,2247191	49,438202
0	1	-0,0295562	0	-0,0270787	0,0023596	0,0022472	4,494382
1	0	0,0477809	0	0,0353933	-0,0117978	-0,011236	3,5280899
0	0	0,3446629	0	-0,5224719	-0,8258427	-0,7865169	1026,9663
104,7619	0	0	1	4,441E-16	-2,22E-16	-0,952381	419,04762
0,6185773	1	0	0	-0,0051852	-0,0049383	-0,0047031	6,6767784
20,928865	0	1	0	0,7407407	-0,2469136	-0,2351558	73,838918
-7,2134039	0	0	0	-0,7777778	-0,7407407	-0,7054674	1001,5168

Оптимальное решение задачи $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = 6{,}676778$, $G_1 = 73{,}838918$, $G_2 = 419{,}047619$. Значение функции $f(x_1^0, x_2^0) = 1001{,}5168$. Следовательно, предназначенный портфель П(0; 1001,5168) не содержит облигации вида A_1 и содержит 6,676778 облигаций вида A_2. Стоимость портфеля снизилась по сравнению с его стоимостью в предыдущем примере и составляет 1001,5168 д.е. Сделаем проверку.

В конце 1 – го года платеж от портфеля составит 50·6,676778 = 333,8389 д.е. Из них 260 д.е. выплачиваются по обязательствам инвестора, а оставшиеся G_1 = 73,838918 д.е. реинвестируются на 1 год по ставке 5% годовых.

В конце 2 – го года инвестор получит сумму: 150·6,676778 + 73,838918(1 + 0,05) = 1079,04756 д.е. Из них 660 д.е. выплачиваются по обязательствам инвестора, а оставшаяся сумма G_2 = 419,047619 д.е. реинвестируется на 1 год по ставке 5% годовых.

В конце 3 – го года платеж от портфеля не поступает. Результат наращения суммы G_2 за год составит 419,047619(1 + 0,05) = 440 д.е. – сумма, необходимая инвестору для выполнения его обязательства в конце 3 – го года. Таким образом, предназначенный портфель составлен только из облигаций вида A_2 и позволяет выполнить обязательства инвестора. Стоимость портфеля 150·6,676778 = 1001,5168 д.е., что заметно ниже суммы, необходимой инвестору для выполнения его обязательств согласно первому варианту стратегии (пример 15.2).

1.16. Задачи.

1. Срок погашения долга – 10 лет. При выдаче кредита была использована сложная учетная ставка 4 % годовых. Величина дисконта за 6-й год срока долга составила 339,738624 д.е. Какова величина дисконта за 3-й и 8-й годы в сроке долга? Какова сумма кредита? Ответ получить двумя способами.

2. На вклад начисляются сложные проценты 8 % годовых. Проценты за 6-й год вклада составили 117,546246 д.е. Какова величина процентов за 3-й и 8-й годы вклада? Какова сумма вклада к концу 8-го года? Ответ получить двумя способами.

3. Сравнить темпы наращения суммы долга по простым процентным ставкам i и d, полагая их равными. Результат сравнения показать на рисунке в виде кривых наращения. Покажите на рисунке величину дохода кредитора, считая заданным срок долга. Для каждой из процентных ставок i и d сделать расчеты суммы погашаемого долга в следующей кредитной операции: ссуда в 10 тыс. д.е. выдана под ставку 12 % годовых с ежемесячным начислением простых процентов. Срок долга 0,5 года, 1 год, 1,5 года. Сравнить для ставок i и d доход кредитора за каждый месяц и весь срок долга. Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым ? Какой можно сделать вывод?

4. Используя выкладки из предыдущей задачи, сравнить скорости дисконтирования по простым ставкам i и d. Нарисовать дисконтные кривые. На рисунке показать величину дисконта, считая заданным срок долга. Сравнить результаты учета векселя на сумму 300 тыс. д.е. методами математического и банковского дисконтирования простыми процентами 6 % годовых за три месяца до погашения. Каков ежемесячный доход кредитора в каждом случае и доход за весь срок? На какую сумму был бы учтен вексель каждым из методов за 0,5 года и 9 месяцев до погашения? Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым?

5. Сравнить между собой методы наращения по номинальным процентным ставкам $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$, полагая их равными. Результат сравнения показать на рисунке в виде кривых наращения. Рассчитать сумму погашаемого долга, полученную каждым из методов, для ссуды в 1000 д.е. при ежемесячном начислении процентов по номинальной ставке 6% годовых в течение 0,5 года, 1 года, 2 лет, 3 лет. Проверьте соответствие результатов расчетов построенным кривым.

6. В условиях предыдущей задачи рассчитать соответствующие эффективные процентные ставки. Как объяснить неравенство $i_{ef} > d_{ef}$?

7. Доказать, что эффективная процентная ставка измеряет реальный относительный доход, получаемый в целом за год от начисления процентов.

8. Сравнить скорости дисконтирования по номинальным процентным ставкам $i^{(m)}$ и $d^{(m)}$. Показать на рисунке дисконтные кривые. Для заданного срока долга показать на этом рисунке величину дисконта. Используя данные методы дисконтирования, сделать расчеты современной стоимости и величины дисконта для следующей финансовой операции. Финансовый инструмент на сумму 8000 д.е. продан за 5 лет до погашения. Дисконтирование долга осуществляется ежеквартально по номинальной ставке 5 % годовых. Соответствуют ли результаты расчетов построенным кривым ?

9. Сумма 1000 д.е. размещена на депозит. Определить величину вклада через 1 год и через 3 года, если для наращения применяется номинальная процентная ставка 8 % годовых при начислении процентов а) ежемесячно б) каждые полгода. Сформулировать зависимость от m наращенной суммы долга при наращении по номинальной процентной ставке. Для случаев а) и б) рассчитать соответствующие эффективные процентные ставки. Объяснить полученное соотношение между эффективными ставками.

10. Известно, что эффективная процентная ставка составляет 15 % годовых. Найти соответствующие номинальные процентные ставки $i^{(4)}$, $i^{(12)}$, $i^{(52)}$, $i^{(365)}$. Объяснить поведение процентных ставок.

11. Известно, что эффективная учетная ставка составляет 12 % годовых. Найти соответствующие номинальные учетные ставки $d^{(4)}$, $d^{(12)}$, $d^{(52)}$, $d^{(365)}$. Объяснить поведение процентных ставок.

12. 5000 д.е. должны быть возвращены через 4 года. Определить современную величину погашаемого долга и величину дисконта, если дисконтирование долга осуществляется по номинальной учетной ставке 6 % годовых а) ежеквартально б) каждые полгода. Сформулировать зависимость от m современной величины погашаемого долга, если для дисконтирования применяется номинальная учетная ставка. Для случаев а) и б) рассчитать соответствующие эффективные учетные ставки. Объяснить полученное соотношение между эффективными ставками.

13. Определить результат наращения суммы 100 д.е. по ставкам простых и сложных процентов $i_{\text{пр.}} = i_{\text{сл.}} = i^{(m)} = \delta = d^{(m)} = d_{\text{сл.}} = d_{\text{пр.}} = 10$ % годовых для следующих сроков: 90 дней, 180 дней, 1 год, 2 года и $m = 2$. Финансовый год равен 360 дням. Какие свойства наращенной суммы долга можно установить по этим расчетам? Какая схема начисления процентов и для каких сроков выгоднее кредитору (заемщику)? Привести пример операции, когда применяется наращение по процентной ставке i, по учетной ставке d, по непрерывной ставке δ.

14. Определить современную величину 1000 д.е., если дисконтирование долга производится по ставкам простых и сложных процентов $i_{\text{пр.}} = i_{\text{сл.}} = i^{(m)} = \delta = d^{(m)} = d_{\text{сл.}} = d_{\text{пр.}} = 13$ % годовых для следующих сроков долга: 90 дней, 180 дней, 1 год, 2 года и $m = 2$. Финансовый год равен 360 дням. Какие свойства современной стоимости долга можно установить по этим расчетам? Какая схема начисления процентов и для каких сроков выгоднее кредитору (заемщику)? Привести пример операции, когда для учета долга применяется математическое дисконтирование, банковское дисконтирование.

15. Определить срок долга, за который сумма 5000 д.е. вырастет до значения 7000 д.е. при начислении сложных процентов по ставкам $i = i^{(4)} = i^{(12)} = d = d^{(4)} = d^{(12)} = \delta = 0{,}15$. Результат проиллюстрировать на рисунке. Какое свойство наращенной суммы долга можно установить по этим расчетам?

16. При условии, что $\delta = 0{,}1$, найти значения эквивалентных процентных ставок: а) $i,\ i^{(4)},\ i^{(12)},\ i^{(52)},\ i^{(365)}$; б) $d,\ d^{(4)},\ d^{(12)}, d^{(52)}, d^{(365)}$.
Сделать вывод.

17. Определить величину силы роста при непрерывном начислении процентов в течение 3 лет, которая эквивалентна: а) учету в банке долгового обязательства за 3 года до погашения по годовой учетной ставке 15 %; б) сложной процентной ставке 14 % годовых с ежемесячным начислением процентов; в) сложной процентной ставке 8,5 % годовых с начислением процентов каждые 3 месяца.

18. В условиях предыдущей задачи срок долга 9 месяцев.

19. Определить сложную процентную ставку с ежемесячным начислением процентов, эквивалентную силе роста 8 % при непрерывном начислении процентов в течение 9 месяцев.

20. Предполагается, что годовая интенсивность процентов является кусочно-непрерывной функцией времени:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0{,}09 & 0 \le t < 3, \\ 0{,}08 & 3 \le t < 7, \\ 0{,}05 & t \ge 7 \end{cases}.$$

Найти дисконтный множитель $v(t)$ для всех $t \ge 0$. Определить современную величину 500 д.е., подлежащих выплате через: а) 3 года; б) 10 лет.

21. Долг в размере 1000 д.е. должен быть погашен через 1,5 года. При выдаче кредита использовалась переменная годовая процентная ставка: в первые три месяца срока долга 8 %, в следующие три месяца 8,5 %, затем полгода 9 % и последние полгода 10 %. Какова сумма кредита? Рассмотреть математическое и банковское дисконтирование по простым и сложным процентным ставкам, включая непрерывную.

22. Необходимо учесть долговое обязательство на сумму 50000 д.е. за 4 года до погашения. Банк для учета обязательств применяет сложную процентную ставку 5 - 7% годовых. Проценты могут начисляться 1, 2 или 4 раза в год. Указать условия договора, по которому это обязательство может быть учтено.

23. При выдаче кредита на 200 дней под 10% годовых кредитор удерживает комиссионные в размере 0,5% от суммы кредита. Ставка налога на проценты 10%. Какова доходность операции для кредитора?

24. Обязательство об уплате 8000 д.е. 01.03 и 12000 д.е. 30.09 пересмотрено так , что первая выплата в сумме 6000 д.е. будет произведена 01.02, а остальная часть долга гасится 15.11. Для замены обязательства применялась сложная процентная ставка 6% годовых. В финансовом году 365 дней.

1) Определить сумму погашаемого остатка. Уравнение эквивалентности составить относительно 01.03 и относительно 01.02. Что выражает уравнение эквивалентности в каждом случае? Зависит ли ответ от выбранного момента времени для составления уравнения эквивалентности?

2) Какой суммой, выплачиваемой сегодня, можно было бы заменить старое обязательство?

25. Реструктуризация государственного долга была произведена следующим образом. Долг в сумме 1,4 млрд. д.е., который должен быть выплачен 1 января 1995 года, преобразован в облигации, выпущенные под гарантии правительства. По этим облигациям государство, начиная с 1 января 1995 года дважды в год выплачивает равные суммы до 2007 года. Для реструктуризации долга использовалась ставка (сложная) 3 % годовых. Какова сумма отдельного погасительного платежа ?

26. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – показательная функция времени. Начальное значение интенсивности процентов 0.1, а годовой темп изменения интенсивности процентов установлен на уровне 1,1; 1; 0,9. Рассчитать значения множителя наращения для следующих сроков долга: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 лет. Сделать рисунок.

27. Годовая интенсивность процентов – показательная функция времени $\delta(t) = \delta_0 a^t$. Получить зависимость от времени дисконтных множителей для возможных значений a. Сделать рисунок.

28. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - показательная функция времени $\delta(t) = 0{,}12\ a^t$. Найти современную стоимость 500 д.е., подлежащих выплате через 2 года, если годовой темп изменения интенсивности процентов установлен на уровне 0,8; 1,1; 1. Объяснить соотношение между полученными суммами. Проверьте соответствие результатов расчетов рисунку, полученному в предыдущей задаче.

29. Предполагается, что годовая интенсивность процентов – линейная функция времени. Определить срок удвоения суммы долга, если начальное значение интенсивности процентов 0.1, а годовой прирост интенсивности процентов составляет 0.05, – 0.05 и 0. Результат показать на рисунке.

30. Годовая интенсивность процентов - линейная функция времени $\delta(t) = \delta_0 + at$. Получить зависимость от времени дисконтных множителей для возможных значений a. Сделать рисунок.

31. Предполагается, что годовая интенсивность процентов - линейная функция времени $\delta(t) = 0{,}13 + at$. Найти современную стоимость 2000 д.е., подлежащих выплате через 3 года, если годовой прирост интенсивности процентов составляет 0.04, – 0.04 и 0. Объяснить соотношение между полученными суммами. Проверьте соответствие результатов расчетов рисунку, полученному в предыдущей задаче.

32. Заем величиной 10000 д.е. должен быть оплачен в течение 10 лет постоянной обычной рентой, выплачиваемой ежемесячно. Сумма ежемесячного платежа рассчитывается на основе ежемесячной процентной ставки 1%. Найти:

а) сумму ежемесячного взноса;

б) величину погашенного основного долга и выплаченных процентов к концу первого года;

в) номер платежа, после которого невыплаченный долг становится меньше 5000 д.е.

33. Четырехгодичный контракт предусматривает взносы в два этапа с начислением на них сложных процентов по годовой процентной ставке 0,08 на первом этапе в течение первых 1,5 лет и по годовой процентной ставке 0,1 на втором этапе в последующие 2,5 года. На первом этапе взносы по 5000 д.е. производятся в конце каждого полугодия. На втором этапе взносы по 8000 д.е. производятся в конце каждого квартала. Найти величину вклада к концу четвертого года контракта.

34. Должник согласен оплатить заем величиной 3000 д.е. пятнадцатью годовыми выплатами величиной 500 д.е. с первой выплатой через 5 лет. Найти доходность этой сделки.

35. Заем величиной 5000 д.е. погашается одинаковыми ежемесячными взносами. На долг ежемесячно начисляются сложные проценты по ставке 12%

годовых. За какой срок долг будет погашен, если ежемесячный взнос составляет: а) 50 д.е.; б) 100 д.е.?

36. Для покупки через 12 лет оборудования за 200 000 д.е. фирма каждый год вкладывает деньги в резервный фонд для начисления сложных процентов по годовой процентной ставке 0,06. Первоначальные взносы были по 11855,41 д.е. После 8 лет банк увеличил годовую процентную ставку до 0,08. Какой величины были взносы в оставшийся период?

37. Определите ставку внутренней нормы доходности инвестиционного проекта со следующим потоком платежей: (-20, -35, -25, 25, 45, 45, 20). Ставка банковского процента равна 20 %. Следует ли осуществлять проект?

38. Рассчитать показатели эффективности инвестиционного проекта с начальными инвестициями 10000 д.е. и постоянными доходами 4000 д.е. в год. Ставка процента 8% годовых.

39. Сравнить проекты (-50, -50, -45, 65, 85, 85, 20, 20) и (-60, -70, -50, -40, 110, 110, 110, 110) по критерию максимального NPV и по критерию максимального IRR. Указать преимущество выбранного проекта в каждом случае. Ставка процента 15 % годовых.

40. Инвестор рассматривает возможность помещения денег в один из следующих займов. Заем А: за цену покупки 10000 д.е. инвестор будет получать 1000 д.е. в год, выплачиваемых ежеквартально на протяжении 15 лет. Заем В: за цену покупки 11000 д.е. инвестор будет получать годовой доход 605 д.е., выплачиваемых ежегодно на протяжении 18 лет, и возмещение его расходов в конце этого срока.

Инвестор может ссужать или занимать деньги под 4 % годовых. Какой проект является более выгодным для инвестора?

41. Определить годовую внутреннюю доходность облигации А со следующим потоком платежей:

Облигация	t_i [годы]				
	0	1	1,5	1,8	2
A	-100	+10	+20	+30	+140

42. Известны безрисковые процентные ставки r(1) = 0,05; r(1,5) = 0,06; r(2) = 0,065. Построить кривую доходностей, используя квадратичное интерполирование. Зная кривую доходностей, определить рыночную цену облигации со следующим потоком платежей:

Срок, годы	0,5	1	1,5	1,8
Платеж	10	10	10	110

43. Купонные 10%-ные облигации, каждая номиналом 1000 д.е. и годовой внутренней доходностью 8%, имеют сроки до погашения 10 и 20 лет соответственно. Определить размер премии для каждой облигации в данный момент и через год при условии, что внутренняя доходность облигаций остается постоянной до их погашения. Сравнить изменения премий. Купонные платежи производятся ежегодно. Решение задачи показать на рисунке.

44. Купонные 10%-ные облигации, каждая номиналом 1000 д.е. и годовой внутренней доходностью 12%, имеют сроки до погашения 8 и 15 лет соответственно. Определить размер дисконта для каждой облигации в данный момент и через год при условии, что внутренняя доходность облигаций остается постоянной до их погашения. Сравнить изменения дисконтов. Купонные платежи производятся ежегодно. Решение задачи показать на рисунке.

45. По 6% купонной облигации номиналом 200 д.е. обещают производить каждый квартал купонные платежи. Определить цену облигации в момент, когда до погашения облигации остается: а) 16 месяцев; б) 15 месяцев.

46. По 10% - ной купонной облигации номиналом 1000 д.е. в конце каждого квартала обещают производить купонные выплаты в течение 5,2 лет. Внутренняя доходность облигации составляет 8% годовых. Определить котируемую цену облигации и величину накопленного купонного дохода, который должен оплатить покупатель облигации.

47. Дана 10%-ная купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году течение 4-х лет. Определите величину дюрации и показателя выпуклости облигации, если безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны: а) 10%; б) 9%; в) 8% годовых.

48. Дана купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 4-х лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и составляют 10% годовых. Определите величину дюрации и показателя выпуклости облигации, если купонная ставка составляет:

а) 7%; б) 8% ; в) 10% годовых.

49. Даны две облигации с 10%-ными купонными ставками и номиналом 1000. Одна из них имеет срок до погашения 4 года, а другая - 15 лет. По обеим облигациям производятся ежегодные процентные платежи. Предположив, что доходность облигаций возрастает с 10% до 14%, рассчитайте цену облигаций до и после изменения процентных ставок. Объясните различия в процентных изменениях цен облигаций.

50. Не производя вычислений, ранжируйте следующие облигации по дюрации:

Облигация	Срок до погашения	Купонная ставка	Внутренняя доходность
А	30 лет	10 %	10%

B	30 лет	0 %	10 %
C	30 лет	10 %	7 %
D	5 лет	10 %	10 %

51. Можно ли сказать, не производя вычислений, какая из трех облигаций будет иметь большее процентное изменение цены при изменении безрисковых процентных ставок на одну и ту же величину? Предполагается, что облигации продаются с одной и той же внутренней доходностью.

Облигация	Срок до погашения	Купонная ставка
A	9 лет	8 %
B	11 лет	10 %
C	12 лет	11 %

52. Даны две облигации, потоки платежей по которым заданы в таблицах

срок, годы	1	2	3	4
платеж	10	10	10	300

срок, годы	2	3	4	5
платеж	10	10	10	300

Внутренняя доходность облигаций составляет 8% годовых. Определите дюрацию и показатель выпуклости этих облигаций.

53. Дана облигация, поток платежей по которой задан в таблице

срок, годы	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
платеж	4	4	5	5	5	100

Безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 6% годовых. Все платежи по облигации отсрочили на 0,5 года. Оцените процентное изменение цены облигации с отсроченными платежами, если безрисковые процентные ставки для всех сроков увеличились на 1%.

54. Дана 10%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами. Внутренняя доходность облигации равна 6%. Определите дюрацию облигации, когда до ее погашения остается $\frac{n}{2}$ лет, если $n = 1,2,\ldots,10$. Зависимость дюрации от срока до погашения показать на рисунке.

55. Дана 6%-ная купонная облигация с ежегодными купонами. Внутренняя доходность облигации равна 15%. Определите дюрацию облигации, когда до ее погашения остается n лет, если $n = 1,2,\ldots,20$. Зависимость дюрации от срока до погашения показать на рисунке.

56. Дана 6%-ная купонная облигация с полугодовыми купонами. Внутренняя доходность облигации равна 15%. Определите дюрацию облигации, когда до ее погашения остается $\frac{n}{2}$ лет, если $n = 1,2,\ldots,30$. Зависимость дюрации от срока до погашения показать на рисунке.

57. Дана купонная облигация со следующими характеристиками: номинал 1000 д.е., срок до погашения 9,25 лет, купонные платежи каждые полгода. Внутренняя доходность облигации 9% годовых. Сравнить относительные изменения цены облигации при изменении ее внутренней доходности на величину ± 2% для купонных ставок 8% и 9% годовых.

58. Рассматривается 8% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают производить купонные выплаты дважды в году в течение 3-х лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы для всех сроков и равны 10% годовых.

1) Вычислить дюрацию и показатель выпуклости облигации;

2) оценить относительное изменение цены облигации при изменении процентных ставок на ± 1%, используя а) только дюрацию облигации; б) дюрацию и показатель выпуклости облигации. Указать роль каждого из показателей в оценке изменения цены облигации. Сделать рисунок.

59. На рынке имеется 9% купонная облигация номиналом 1000 д.е., по которой обещают каждый год производить купонные выплаты в течение 5 лет. Безрисковые процентные ставки одинаковы и равны 9% годовых. Найти планируемую фактическую стоимость инвестиции в облигацию в момент времени, равный дюрации облигации, если через полгода после покупки облигации процентные ставки снизились до 8,5 % , а через 1,5 года после покупки снова установились на уровне 9 % годовых.

60. Инвестор со сроком инвестиции 3 года рассматривает покупку 20-летней облигации, купонные платежи по которой выплачиваются каждые полгода. Номинал облигации 1000 д.е., годовая купонная ставка 8 %, доходность к погашению 10 % годовых. Инвестор ожидает, что он сможет реинвестировать купонные выплаты по годовой ставке 6 % и в конце планируемого срока инвестиции 17-летняя облигация будет продаваться с доходностью к погашению 7 % годовых. Определить годовую доходность инвестиции в эту облигацию на 3 года при этих условиях.

61. Имеются облигации трех видов:

Срок (годы)	B_1	B_2	B_3
0	-855,37	-291,72	-990,91
0,5	-	10,5	-
1	-	10,5	90
1,5	-	500	-
2	1035	-	1100

Построить поток платежей от портфеля П(2000, 2000, 2000). Найти дюрацию и показатель выпуклости портфеля (рыночную процентную ставку определить из условия задачи).

62. Дюрации пяти видов облигаций соответственно равны: 3; 3.5; 3.75; 4.2; 4.5 лет, а их показатели выпуклости – 10, 12, 15, 20 и 25 лет^2. Сформировать портфель из этих облигаций с дюрацией, равной 4 годам и наименьшим показателем выпуклости, если $\omega_1 \le 0{,}2; \omega_2 \ge 0{,}2; \omega_3 \ge 0{,}2$. Для полученного значения показателя выпуклости портфеля оценить относительное изменение цены портфеля при изменении рыночной процентной ставки с 9% до 8% годовых.

63. Портфель составлен из облигаций трех видов. Купонные платежи по облигациям производятся раз в год.

Облигация	Купонная ставка, %	Срок погашения (лет)	Номинал, д.е.	Рыночная стоимость, д.е.
B_1	7,0	5	10000	9209
B_2	10,5	7	20000	20000
B_3	6,0	3	30000	28050

Определить средневзвешенную доходность портфеля и внутреннюю ставку доходности.

64. Инвестор через два года должен осуществить за счет своего портфеля платеж 1 млн. д.е. Инвестор рассматривает возможности инвестирования в облигации двух видов B_1 и B_2, параметры которых приведены в таблице:

Вид облигации	Номинал (д.е.)	Купонная ставка	Число платежей в год	Срок до погашения
B_1	1000	7%	1	1 год

B_2	1000	8%	1	3 года

Процентные ставки на рынке одинаковы для всех сроков и составляют 10 % годовых. Предполагается, что процентные ставки на рынке могут измениться на одну и ту же величину для всех сроков. Считая, что сразу после формирования портфеля процентные ставки а) поднялись до 11 % ; б) снизились до 9 %,

1) рассмотреть возможные альтернативы инвестора;

2) сформировать иммунизированный портфель, позволяющий инвестору через два года выполнить его обязательство.

65. В начальный момент времени безрисковые процентные ставки для всех сроков одинаковы и равны 8% годовых. На рынке имеются купонные облигации со следующими параметрами: $A_1 = A_2 = 100$ д.е., $f_1 = f_2 = 10\%$, $T_1 = 2$ года, $T_2 = 4$ года. Рассчитать стратегию иммунизации портфеля при инвестировании 10000 д.е. в данные облигации сроком на 3 года, если через год после инвестирования безрисковые процентные ставки увеличились до 9% годовых.

66. В условиях предыдущей задачи учесть, что при покупке и продаже облигаций берутся комиссионные в размере 0,5 %.

67. Через 1, 2 и 3 года инвестору предстоят выплаты соответственно в размерах 400, 600 и 1000 д.е. На рынке имеются облигации A и B со следующими параметрами:

Облигация	C_1	C_2	C_3	P
A	20	20	100	100
B	10	100		90

Рыночная ставка для всех сроков 5% годовых. Сформировать портфель наименьшей стоимости, позволяющий инвестору:

1) выполнить его обязательства;

2) выполнить его обязательства при условии, что часть платежа, поступающего от портфеля, используется для выполнения обязательства через год.

Рекомендуемая литература

1. Четыркин Е.М. Финансовая математика. Учебник. М.: Изд-во “Дело”, 2000.
2. Чуйко А.С., Шершнев В.Г. Математические основы финансового обслуживания. М.: Изд-во РЭА, 2000.
3. МакКачион Дж.Дж., Скотт У.Ф. Введение в математику финансов. – М.: 1997.
4. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений. – М.: “Финансы и статистика”, 1999.
5. Ковалев В.В. Методы оценки инвестиционных проектов. – М.: “Финансы и статистика”, 1999.
6. Четыркин Е.М. Финансовый анализ производственных инвестиций. М.: Изд-во “Дело”, 1998.
7. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. Учебн.-практ. пособие для вузов. – М.: Изд-во “ПРИОР”, 1999.
8. Барбаумов В.Е., Гладких И.М., Чуйко А.С. Финансовые инвестиции. Ч.1. Инвестиции с фиксированными доходами. Учебное пособие. М.: Изд-во РЭА, 2000.
9. Воронцовский А.В. Методы обоснования инвестиционных проектов в условиях определенности. Учебное пособие. Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1999.

10. Аньшин В.М. Инвестиционный анализ. Учебное пособие. М.: Изд-во “Дело”, 2000.
11. Лоренс Дж. Гитман, Майкл Д. Джонк. Основы инвестирования. – М.: Изд-во Дело, 1999.
12. МакЛафлин Д.Дж. Ценные бумаги: как добиться высоких доходов. М.: Изд-во «ДЕЛО», 1999.
13. Фрэнк Дж. Фабоцци Управление инвестициями. – М.: Изд-во «ИНФРА-М», 2000.
14. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. - М.: ИНФРА-М, 1999.
15. Benninga S. Financial Modeling. MIT, 2000.
16. Broverman S.A. Mathematics of investment and credit. Winsted, ACTEX Publ. 1996.
17. Zima P., Brown R.L. Mathematics of Finance. McGraw-Hill, 1993.